TRATTATO

DELL' ARIETE

IDRAULICO.

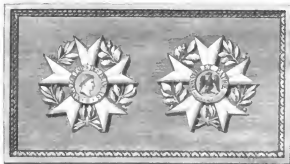
TRATTATO

DELLO

ARIETE IDRAULICO

DEL

CAVALIERE BRUNACCI

MEMBRO DELL' ISTITUTO.

MILANO,

DALLA STAMPERIA REALE,

1810.

A SUA ALTEZZA IMPERIALE

IL PRINCIPE

EUGENIO NAPOLEONE

VICERÈ D'ITALIA.

Altezza Imperiale,

Son tali e tante le beneficenze colle quali il generoso Patrocinio di V. A. I. si compiace ogni giorno di animare i miei studj e l'opera mia nel promuovere quelle facoltà di cui mi venne affidato l'insegnamento nella R. Università di Pavia, che invano io vado fra me ripensando da lungo tempo il come far palese almeno la mia rispettosa gratitudine, e l'ansietà che provo di pur trovare una via di pubblicarle. Se uno Storico, un Poeta, un Artista possono dalle nobili loro discipline ricavare facilmente subjetti, nel trattare i quali mostrarsi riconoscenti al vostro favore, e adoratori a un tempo delle rare virtù che degno vi fanno di rappresentare a nostra gran ventura fra noi il Massimo de' Monarchi, come il potrebbe mai un Geometra,

a cui son familiari soltanto principj e linguaggio e istrumenti affatto estranei a quelle arti colle quali si tramandano all' immortalità i fasti de' sommi Capitani, de' Principi gloriosi, de' Protettori delle Scienze e degli scienziati? Non altro sussidio all' uopo rimane adunque per siffatto intento, che di offerire ad un Principe generoso ed umano i frutti di quegli studj che per sorte meritarono i graziosi suoi sguardi; e poichè con istraordinarj assegni e con magnanimi tratti di Clemenza non isdegnò V. A. I. di facilitarmi la via di astruse ricerche sulla teorica geometrica del famoso Ariete Idraulico *di Mongolfier, non saprei qual altro pegno del grato animo mio presentare all' I. A. V. se non il Trattato che su quelle sperienze ed osservazioni ho potuto formare, qualora non lo giudichi indegno di comparire sotto i suoi faustissimi auspicj.*

V. A. I. inclinata sempre ad accogliere ed aggradire il buon volere, si degni d' esercitare con me la solita indulgenza, e di riconoscere nel mio benchè picciolo tributo i sentimenti della più profonda ed ossequiosa venerazione.

Di V. A. I.

Divotissimo, obbligatissimo servitore,
Vincenzo Brunacci.

PRELIMINARE.

Verso il cadere del passato secolo l'inventore del globo areostatico, l'ingegnosissimo *Mongolfier*, annunziò all' Istituto nazionale di Francia, di avere ritrovata una nuova macchina per innalzare l'acqua a considerabili altezze. Di questa, come ei scrisse nel 1802, aveva fino dal 1794 fatto uso in una sua cartiera, onde sollevare l'acqua necessaria a muovere gli ordigni di quella fabbrica (*). Il suo strumento non conteneva nè ruote, nè trombe, nè altri simili soccorsi idraulici, e non abbisognava di alcuno agente straniero per essere messo in opera, come, per cagion di esempio, d'uomini, d'animali, di vento, di vapori o d'altro. L'acqua stessa è quella che innalza sè medesima molto al di là del suo proprio livello.

(*) Vedasi il Giornale delle Miniere del 1802, che si stampa a Parigi.

Una vasca che resti sempre piena, somministra l'acqua ad una canna orizzontale, o, se vuolsi, inclinata, alla cui estremità è accomodata una campana ripiena di aria con un certo giuoco d'animelle, delle quali alcune si aprono, mentre che altre si chiudono. Alla campana è innestato un cannello verticale per cui l'acqua ascende all'altezza desiderata, la quale può essere quanto si vuole maggiore del livello della vasca medesima.

Data una volta l'acqua all' *Ariete idraulico*, chè tale è il nome di questa macchina, essa continua a lavorare, per così dire, spontaneamente, senza stranieri ajuti, e la pressione dell'acqua di quella vasca è la prima cagione di quel maraviglioso innalzamento del fluido.

Annunziata così dal *Mongolfier* la scoperta, quanto ella parve utilissima, altrettanto sembrò incredibile; perocchè l'acqua, giusta le leggi dell' Idraulica, non può per forza propria montare al di là del punto ond'è discesa: pareva in conseguenza miracoloso l'effetto dell' Ariete idraulico; e la natura non fa miracoli. Si esaminò allora la macchina: se ne fecero le sperienze, e si restò convinti; e finora più di dugento di questi ordigni fatti in Francia, in Prussia ed in Inghilterra attestano la verità di quanto annunziò il chiarissimo inventore (*).

Ma per quali leggi mai opera l'acqua nell'Ariete, onde giugnere ad ottenere così mirabili risultamenti? Ecco l'altro passo che restava a farsi dopo la scoperta della macchina, affinchè con la ragione alla mano esaminandone i varj pezzi e riconoscendone il loro debito uffizio, si potessero dare agli artefici norme sicure per fabbricare Arieti ognor più perfetti.

(*) Vedasi il tomo VII del giornale della Scuola politecnica del 1808, ove è una relazione di *Mongolfier* sopra l'utilità di rimpiazzare la celebre macchina di *Marly* coll' Ariete idraulico.

Giacomo Mezio olandese inventò il cannocchiale; ma se il *Galileo*, il *Neutono*, l'*Eulero* ed altri illustri Geometri non avessero svelate le leggi che regolano il moto della luce nell'incontro di quei vetri, questo strumento sarebbe anche oggidì assai distante dalla sua perfezione. Il caso fece fare a *Mezio* la scoperta, ma ogni miglioramento che questa ha ricevuto di poi, è dipenduto dallo studio della luce.

Mongolfier tentò di spiegare in qualche modo gli effetti della sua macchina; ma le cause da lui messe in campo mancarono d'ogni scientifica evidenza, anzi furono dalla sperienza smentite; giacchè si vide che l'Ariete poteva comporsi in guisa da escludere ogni effetto di tali cagioni. Lo stesso *Mongolfier* non ne restò soddisfatto, e riprova ne sia l'avere egli diversamente ragionato sui principj onde traggono origine i maravigliosi risultamenti della sua scoperta (1). Ma anco in questa seconda spiegazione non è stato più fortunato che nella prima.

Intanto l'utilità di quella macchina aveva invogliato i Fisici ed i Geometri ad indagarne il mistero. Non parlando di alcuni scritti di poco momento che trovansi in alcuni giornali francesi, tedeschi ed italiani, io farò parola soltanto di due opere pubblicate, l'una in Italia, l'altra in Germania, le prime che diano qualche lampo di luce in tanta oscurità.

I due professori *Pino* e *Racagni*, di Storia naturale l'uno, di Fisica l'altro, pubblicarono una Memoria (2) nella quale procurarono d'investigare l'origine dei fenomeni dell'Ariete. Essi videro che i suoi effetti doveansi in parte dedurre dall'urto che fa l'acqua sulle pareti di un cannello nel quale

(1) Vedansi i citati Giornali delle Miniere e della Scuola politecnica.
(2) Atti della società italiana delle scienze, tom. X.

essa fluisce, quando tutto a un tratto se ne ferma lo sgorgo. Certo ch' essi fecero sentire una verità, dalla quale poscia ricavarono buone ragioni per intendere alcuni effetti di quella macchina. Ma eglino soggiunsero che non vedevano come potere assoggettare all' Algebra la misura di quella cagione, giacchè nelle dottrine che i più valenti Idraulici, come i *Bernulli*, l' *Eulero* ed altri, ci hanno lasciate sulle pressioni e sull' urto dei fluidi, nulla vi era che a questo caso si riferisse.

Nell' 1805 comparve a Berlino un libro sopra l' Ariete idraulico. Questo contiene una serie d' osservazioni per ispiegare in qualche modo come operi quella macchina, e sono esse corredate di moltissimi accurati sperimenti. Quivi pure è annunziata la medesima verità che ci avevano fatta conoscere i due illustri Italiani. Il celebre signor *Eitelvein*, che ne è l' autore, variando alcuni pezzi della macchina, ed esperimentando, si è ancora ingegnato di assegnar delle regole per la miglior costruttura dell' Ariete; ma egli termina il suo lavoro dichiarando di non aver già preteso di dare una Teorica geometrica di quella macchina, ma soltanto una qualche ragione delle operazioni di lei. Ei comprese poi benissimo che quando s' ignora la Teorica di una macchina, tutti gli effetti che, variandone i pezzi e le circostanze, si ottengono da essa, e che si credono dagl' imperiti altrettante scoperte, non debbono essere in sostanza che risultamenti di quella Teorica; e per ciò nel suo libro soggiunge che le sperienze da lui fatte altro scopo non hanno, che di somministrare qualche norma utile per chi vorrà accingersi ad indagare i principj dai quali possa ricavarsi la vera stima geometrica dell' Ariete.

Il lavoro di quest' illustre Tedesco fece rivolgere la Reale

Accademia delle scienze di Berlino alla scoperta di *Mongolfier*, e riconoscendone l'importanza e l'utilità, propose per soggetto del premio nel concorso dell'anno 1810: *Dare una Teorica geometrica dell'Ariete idraulico, confrontando sempre i risultamenti del calcolo con quei dell'esperienza* (*).

Questi pochi cenni sull'invenzione dell'Ariete idraulico e su di ciò che si è scritto a tal proposito, sono bastanti a mostrare che la Teorica geometrica di quella macchina offeriva un campo degno d'essere coltivato dai Geometri e dai

(*) La classe delle Matematiche di questa Reale Accademia, nell'adunanza pubblica tenuta addì 4 agosto 1808 per celebrare l'anniversario della nascita del suo Sovrano, propose per soggetto del premio il quesito: *Dare una Teorica completa dell'Ariete idraulico, avuto riguardo all'adesione dell'acqua*: essa aggiunse che i concorrenti avrebbero potuto a loro piacimento o partire dagli esperimenti già noti, o appoggiarsi ai loro proprj; osservando però, come condizione essenziale, di paragonar sempre i risultamenti del calcolo con gli esperimenti. Essa invitò i dotti di ogni paese, eccettuati i membri ordinarj dell'Accademia, a rispondere a queste dimande. Il premio era una medaglia d'oro del valore di cinquanta ducati, le Memorie doveansi indirizzare al Segretario perpetuo della Accademia, *franche di porto*, ed il termine stabilito per riceverle era al dì primo di maggio del corrente anno 1810, dichiarandosi inoltre che dopo quel giorno non sarebbe stato assolutamente ammesso alcuno scritto, qualunque ragione allegar si potesse per giustificare la tardanza.

Io tenendomi occulto come si costuma, verso la fine del passato gennajo feci pervenire in mano di S. E. il signor conte *Marescalchi*, Ministro delle relazioni estere del Regno d'Italia a Parigi, un involto contenente questo scritto, affinchè l'E. S. si degnasse di farlo avere al signor Ministro prussiano residente a Parigi, e questi lo spedisse per tempo alla Reale Accademia di Berlino, alla quale era diretto. Tutto fece quell'illustre personaggio, ed io serbo copia del biglietto che il signor Ministro prussiano scrisse, dichiarando la ricevuta del piego. Esso è del seguente tenore: *Ho l'onore di dichiarare a V. E.* (Marescalchi) *d'aver ricevuto la lettera di cui ha voluto onorarmi, come pure l'involto che vi era unito*, pel quale avrò particolare premura. *Io prendo quest'occasione per rinnovare a V. E. i sentimenti della mia stima ecc.*

Parigi 18 *febbrajo* 1810. BROEKHAUSEN.

Eranvi pertanto due mesi e dodici giorni di tempo per mandare il piego all'Accademia; e per ciò io viveva tranquillo, sperando che il mio scritto

Fisici, e che poteva dare speranza di ubertosa raccolta. Io mi accinsi dunque a solcarlo.

La prima strada ch'io tenni per giugnere allo scopo prefissomi, fu quella di studiare e meditare sugli esperimenti riferiti dai varj autori, e particolarmente su i moltissimi del prenominato *Eitelvein*, per vedere se mi fosse riuscito, adattando effetti a cagioni e cagioni ad effetti, scoprire alfine i fondamenti della Teorica dell'Ariete; ma presto m'accorsi che in questa maniera m'innoltrava in un laberinto da non poterne uscire; e poi andava tra me medesimo pensando che se qualche cosa avesse potuto scoprirsi con questo

sarebbe per questa via giunto felicemente al concorso; ma m'ingannai. Nel mese di giugno io seppi che non erano pervenute all'Accademia Memorie scritte in lingua italiana. Feci allora qualche ricerca presso S. E. *Marescalchi*, ed interpellato dall'E. S. il Ministro prussiano, che non era più il signor *Brockhausen*, ma il signor *Krusemarck*, questi rispose di non aver alcuna notizia di quel plico consegnato al suo predecessore: che però ei non comprendeva come l'Accademia non lo avesse ricevuto; e soggiunse che ei si esibiva di mandare all'Accademia una copia di quello scritto, ed informarla di più delle cause della tardanza. Non potei profittare di sì gentile esibizione perchè era già da due mesi e più scaduto il termine del concorso, e perchè doveasi pronunziare il giudizio nei primi del mese di agosto, ed il biglietto del signor *Krusemarck* era del 12 luglio a Parigi, onde non aveva il tempo di far copiare lo scritto, e d'inviarlo a Parigi per essere di nuovo spedito a Berlino.

Per sapere poi, se mai era possibile, qualche cosa del mio plico, io mi rivolsi ai signori *Bignami* e *Vassalli*, banchieri di questa città di Milano, e li pregai a fare alcune indagini per mezzo di qualche loro corrispondente a Berlino, onde io venissi in chiaro se l'Accademia Reale di quella città avesse avuto qualche contezza del mio lavoro. Ho allora saputo che *l'accademia aveva ricevuto due soli scritti sulla Teorica dell'Ariete: che niuno aveva soddisfatto ai desiderj dell'Accademia; che perciò niuna memoria era stata coronata e che il premio era stato raddoppiato e rimessa la questione all'anno 1812: per quello poi che spetta allo scritto italiano rimesso al signor* Brockhausen, l'Accademia non l'ha ricevuto*; ma avendo saputo che un tale scritto era sempre in potere del signor* Brockhausen*, essa gli aveva scritto e dimandato questa Memoria la quale sarebbe stata ammessa al prossimo concorso.*

In tale stato di cose ho io risoluto di dare alla luce questo mio lavoro.

mezzo, certo non sarebbe essa sfuggita alla sottilità di quegl' ingegni. Tentai adunque d' incamminarmi più felicemente per altra via.

Incominciai pertanto dallo scomporre, per dir così, la macchina, e dallo studiare gli effetti dell' Ariete ad uno per volta. Primieramente innestando un semplice cannello orizzontale alle pareti di un vaso, esaminai ciò che accadeva, quando principiava l' acqua a sgorgare dalla bocca di questo cannello; poi quali effetti succedevano in esso e nell' acqua sgorgante, allorchè tutto ad un tratto chiudeva la bocca del cannello o la riduceva più piccola; in somma, *provando e riprovando*, giunsi finalmente a riconoscere tre fatti (uno de' quali è quello annunziatoci da *Pino* e *Racagni*) su i quali tutta si appoggia la bramata Teorica. Guidato da cotali principj, feci fabbricare un Ariete, ed ebbi la soddisfazione di vedere che aveva veramente colpito nel segno. Mi accinsi allora con coraggio a scrivere questo Trattato del quale ora darò qualche ragguaglio.

Il Trattato è diviso in tre parti: nella prima espongo quei tre fenomeni, li dichiaro con ragioni, o, come suol dirsi, ne do una fisica spiegazione, assegnando le cause che li producono. Faccio di poi vedere le conseguenze che debbono venirne allorchè si combinano insieme questi fenomeni, e così compongo a poco a poco una specie d' Ariete. Do poscia la dichiarazione della macchina e di tutti i più piccoli fenomeni che essa ci presenta, allorchè si pone in opera; e termino col far conoscere come ciascuno di essi sia una conseguenza delle cose spiegate. In questa parte non ho adoperati che semplici ragionamenti, e non ho mai fatto uso di dimostrazioni geometriche o algebraiche, e per ciò a tutta questa dottrina ho dato il nome di *Teorica fisica*

dell'Ariete; e potranno intraprendere la lettura d'essa anche coloro che sanno assai poco di Geometria e d'Algebra.

Nella seconda Parte assoggetto al poter dell'Algebra la misura di quei fenomeni, dando le soluzioni dei varj problemi che si possono proporre su di loro, e di alcuni altri i quali fanno strada allo scioglimento di un problema in cui consiste quasi tutta la dottrina dell'Ariete, cioè: *Dato un Ariete idraulico e l'altezza cui debbe spingersi l'acqua, trovare le formole che rappresentano la quantità d'acqua innalzata, per esempio, in un'ora, e quella che in tal tempo si è impiegata a muovere la macchina medesima.*

Le dottrine esposte in questa seconda parte formano la Teorica geometrica dell'Ariete, ed esse non presentano veramente che risultamenti *algebraici*, giacchè non solo tutte le misure che si riferiscono ai pezzi della macchina sono rappresentate da lettere; ma ancora lo sono que'*dati* ai quali, con l'ajuto di naturali esperienze, sono stati assegnati valori numerici, come, per cagion d'esempio, i *dati* che appartengono alla resistenza che l'acqua incontra a correre in lunghi cannelli. Anche alcune forze accelerative rappresentate le abbiamo con formole generali, capaci ad esprimere qualunque ipotesi che voglia ammettersi sopra di loro. Perciò nelle formole cui siamo giunti, è mestieri che s'introduca il valore di quei *dati* che assume il problema, acciocchè esse possano convertirsi in risultamenti numerici, quando avvenga di doverle applicare alla pratica o confrontarle con le esperienze: nè qui voglio tralasciar di osservare che nello sciogliere alcuni problemi, si giunge ad equazioni che non si sanno integrare o risolvere; ma questo difetto attribuire non si debbe alla Teorica geometrica dell'Ariete, ma allo stato attuale dell'Algebra. Così in queste dottrine, come negli

altri rami di Matematica applicata, è necessario contentarsi dell' approssimazione, quando ottener non si può l' esattezza.

Io ho poi destinata la terza parte del Trattato al confronto delle Teoriche con gli esperimenti. Se io avessi posto al cimento delle sperienze la Teorica fisica soltanto, poco avrei avuto da fare, poichè i di lei risultamenti non essendo ridotti a stima e misura precisa, ma consistendo in precetti e regole le quali non determinano però il *quantum* delle cose, essi vedonsi sempre a colpo d' occhio confermati dalle sperienze. Ma ho voluto anche cimentare la Teorica geometrica; e per questo ho principiato dal determinare in numeri il valore dei *dati* dei quali abbisogna quella Teorica, e che s' incontrano nelle formole da essa somministrateci. Io non parlo di quei *dati* che dipendono dall' effettiva misurazione dei pezzi della macchina, ma di quei che dovrebbero esserci somministrati dalle naturali sperienze, come sono, per esempio, quei che appartengono all' urto dei fluidi ed alla resistenza che questi soffrono a correre nei lunghi condotti. Questo è stato il punto più scabroso del mio lavoro. Spesso i varj autori che hanno scritto della Fisica dei fluidi in moto, non sono d' accordo sopra queste dottrine: anche più spesso sono discordi, e talvolta mancano intieramente gli esperimenti da cui quelle dipendono, come, per esempio, avviene per l' urto dei fluidi ristretti in cannelli; di modo che non si sa a qual partito appigliarsi in quella determinazione. E pure senza di questa non si può fare, se si vogliono ridurre le formole d' Algebra a risultamenti numerici utili alla pratica.

Io mi sono ingegnato di soddisfare alla meglio che ho potuto, a questo bisogno, col chiamare ad esame le più sicure sperienze idrauliche che si abbiano, ed ho in somma

assegnato a ciascuno di quei *dati* il suo valore numerico, come ce lo permettono le attuali cognizioni di Fisica; nè dubito punto di ottenere indulgenza dal discreto lettore, quando egli, mettendosi nei miei piedi, vorrà riflettere in qual modo si avrebbe potuto fare diversamente.

Ridotte le formole a non contenere altri *dati* che quei che dipendono dalla misurazione delle parti della macchina, ho assegnato ad essi i valori che appartengono al mio Ariete; ed allora riducendo a numeri quelle formole, ho computate alcune tavole con le quali ho confrontati i risultamenti delle sperienze. Questi confronti hanno ad evidenza provato che i principj, in virtù dei quali l'Ariete produce i suoi mirabili effetti, sono appunto quei che io gli ho assegnati nella Teorica fisica e calcolati nella geometrica. Non ostante, avendo io rilevate alcune discordanze, mi persuasi che queste nascer dovessero da cagioni non introdotte in calcolo.

Presi adunque a sperimentare con più cura, ed allora in fatti potei riconoscere che siffatte discordanze provengono appunto da cause, la natura delle quali è dai Fisici conosciuta, per così dire, all'ingrosso, ma delle quali non sappiamo le regole che seguono nell'operare, e quindi assoggettar non si possono a calcolo. Tale è, per esempio, il distendimento che soffrono le pareti del condotto della macchina, ed il ritorno al suo primiero calibro. Assegnate queste cagioni, mi fu allora facile il rendere pienissimo conto di quelle discordanze, le quali in sostanza sono del medesimo genere di quelle che s'incontrerebbero riducendo a stima gli effetti di un argano o di un vette (e sì che queste sono le macchine più semplici che si conoscano), se si volessero confrontare i risultamenti del calcolo con quei degli esperimenti; imperocchè non troveremmo mai un accordo

perfetto, ma noi potremmo sempre rendere ragione delle differenze, assegnando i veri motivi d'onde derivano, sebbene questi non possano calcolarsi.

Ho aggiunto poi al Trattato un'Appendice la quale tratta di ciò che fa l'aria racchiusa nella campana dell'Ariete per accrescere la quantità d'acqua che s'innalza da quella macchina. L'Appendice è divisa in tre articoli; nel primo dei quali si dà la Teorica fisica di quell'effetto, nel secondo la geometrica, e nel terzo il di loro confronto con l'esperienze. In somma se di soverchio non mi confido, parmi d'aver messa la Teorica dell'Ariete a pari con quella delle altre macchine meccaniche ed idrauliche più note, e delle quali sono pienamente intesi e calcolati gli effetti. Il di più far lo debbe la Pratica; e se con la scorta della Teorica si avranno occasioni di costruire Arieti, io non dubito punto che, siccome l'arte col lungo esercizio da per sè stessa si affina, così non possa questa macchina perfezionarsi a tal segno che metta il conto applicarla ancora all'irrigazione delle campagne, ed in generale all'innalzamento di grandissime masse di acqua (*).

(*) Il signor *Mongolfier* nella relazione da noi citata alla nota della pag. sesta dice che il più grande Ariete che si conosca, è quello fatto in Inghilterra dai signori *Wat* e *Boulton* a *Soho*. Il condotto ha un piede di diametro, è messo in azione da una caduta di acqua di un metro, ed innalza l'acqua a 9 metri d'altezza. Secondo alcune congetture dello stesso *Mongolfier* quest'Ariete debbe innalzare 224 metri cubici di acqua per giorno. Nella medesima relazione si parla di un altro Ariete costruito nel 1807 a Lione da quel podestà *M. Fay-Sathonay*; l'acqua ha 10 ½ metri di caduta; il condotto è di 33 metri di lunghezza: l'acqua sale all'altezza di 36 metri per mezzo di un cannello inclinato lungo 230 metri. L'acqua che mette in moto la macchina è, in un minuto, metri cubici 0,0837 cioè 83,7 litri; l'acqua innalzata è la quinta parte di quella, ciò che fa 24 metri cubici circa per giorno. L'Ariete sta continuamente in opera, e quando ne ebbe notizia il signor *Mongolfier*, erano 20 mesi che lavorava senza aver nulla sofferto. Sarebbe stato desiderabile aver una relazione più circostanziata di queste due macchine, per poterne confrontare gli effetti con le formole teoriche.

Io termino questo Preliminare col dichiarare di non essermi trattenuto a parlare delle fontane o dei getti d'acqua che possono aversi facendo che il cannello per cui sale l'acqua, termini a cono e sbocchi liberamente nell'aria, perchè è cosa assai facile il calcolarne le circostanze tutte, come sarebbe a dire l'altezza, la quantità d'acqua ecc., per quei che avranno comprese le dottrine spiegate in questo Trattato; per lo stesso motivo poco mi sono trattenuto a considerare il caso nel quale l'Ariete lavora, essendone immerso il condotto in un'acqua corrente, perchè le formole assegnate per valutare l'acqua che la macchina innalza e quella che essa consuma quando l'Ariete prende l'acqua da una vasca, sono buone anche pel caso di cui si parla, come a suo luogo si dice; e solo basta sostituire in esse la velocità di quell'acqua corrente, in vece di quella dell'acqua che sgorgando dalla vasca entra nel condotto.

INDICE

DELLE COSE NOTABILI CHE SI CONTENGONO NELL' OPERA.

PARTE PRIMA.

TEORICA FISICA DELL' ARIETE IDRAULICO.

CAPO I. *Fondamenti della Teorica fisica* . . . . pag. 1

§ 1. *Fenomeno I. Al cominciare lo sgorgo dalla bocca di una canna innestata ad un vaso pieno d' acqua, il getto ha una velocità quasi nulla; cresce a poco a poco fino ad un certo segno, e poi non varia più, formandosi il* getto invariabile ivi

4. *Finchè il getto non è divenuto invariabile, l' acqua muovesi entro la canna con moto accelerato* 2

6. *Sgorgando l' acqua dalla bocca mezza chiusa di una canna, se in un tratto si apre, diminuisce subito la velocità del getto per crescere poi sino ad un certo segno e rendere il getto invariabile* ivi

8. *Fenomeno II. Sgorgando l' acqua dalla bocca di una canna se in un tratto si ristringe lo sbocco, il getto cresce molto di velocità; scema poi a poco a poco e diviene invariabile* 3

10. *Finchè il getto non è divenuto invariabile, l' acqua muovesi entro la canna con moto retardato* ivi

11. *Fenomeno III. Sgorgando l' acqua dalla bocca di una canna, se in un tratto si ferma lo sgorgo, si fa sulle pareti della canna uno sforzo maggiore di qualunque pressione* ivi

17. *Dichiarazione delle sperienze con le quali si vedono gli annunziati fenomeni* 5

CAPO II. SPIEGAZIONE *dei due primi fenomeni* . . . . pag. 7

§ 21. *Ragione del primo fenomeno, e perchè nel mentre ch' ei segue l' acqua, si muova nella canna con moto accelerato* ivi

28. *Quanto più lunga è la canna per cui corre l'acqua, tanto maggior tempo impiega il getto a farsi invariabile* 9

29. *Se il diametro della canna ha una grandezza considerabile, la velocità, al cominciare del getto, non è nulla* 10

30. *Perchè ad allargare in un tratto la bocca della canna da cui sgorga l' acqua, la velocità subito scemi per crescere in seguito* ivi

31. *La quantità di acqua che sgorga dalla canna prima che il getto sia divenuto invariabile, sarà tanto maggiore, quanto sarà maggiore il tempo impiegato dal getto per divenir tale* 11

32. *Ragione del secondo fenomeno, e perchè nel mentre che segue l' acqua, corra con moto retardato*. . . . ivi

36. *Proporzione tra la velocità del getto, prima che si ristringa la bocca della canna, e la velocità nell'atto del ristringimento* 13

CAPO III. SPIEGAZIONE *del terzo fenomeno* 14

§ 38. *Considerazioni sull' urto ordinario dei fluidi, e sopra quello dei fluidi racchiusi in cannelli* ivi

40. *Applicazioni alla spiegazione del fenomeno, e qual modificazione vi arrechi il distendimento delle pareti della canna* 15

43. *Lo sforzo dell' acqua sulle pareti della canna cresce col crescere la velocità dell' acqua, la lunghezza della canna e la grandezza del di lei diametro* . . 16

45. *Esperienze fatte con canne di vetro e di cuojo di varie lunghezze* 17

48. *Si svela la cagione che produce il secondo fenomeno* . 18

50. *Tanto maggior tempo impiegherà nel secondo fenomeno il getto a farsi invariabile, e tanto maggiore sarà l' acqua sgorgatane, quanto più lunga sarà la canna* . . . . pag. 19
CAPO IV. *CONSEGUENZE dell' esposte dottrine* 20
§ 54. *Se, chiudendosi ad un tratto lo sbocco dell' acqua, si aprisse nello stesso istante un foro verso la bocca nelle pareti della canna; quando il foro fosse della grandezza della bocca, l' acqua continuerebbe a correre nella canna come se non le fosse chiuso lo sbocco; e se il foro fosse più piccolo, tutto avverrebbe come quando si ristringe la bocca della canna* ivi
60. *Chiudendo quel foro col porvi sopra una lastra pesante, sarà questa gettata via nell' istante nel quale si ferma lo sgorgo dalla bocca* 21
61. *Se quel foro laterale metterà in un vaso nel quale trovisi l' acqua ad un certo livello, quando si chiuderà la bocca della canna, l' acqua scapperà entro quel vaso, e vi farà alzar di livello l' acqua che vi si trova* 22
64. *Quanto più alto sarà il livello dell' acqua in quel vaso, per tanto minor tempo vi entrerà acqua, e tanto minor quantità ne entrerà* 23
65. *La diminuzione del foro produce un vantaggio ed uno scapito alla quantità dell' acqua che entra nel vaso; e l' aumento nella lunghezza della canna produce sempre un vantaggio* ivi
CAPO V. *DICHIARAZIONE dell' Ariete e del suo modo d' operare* . 24
§ 69. *Descrizione dell' Ariete* ivi
72. *Nuovo ingegno per far chiudere lo sbocco dell' acqua dal condotto dell' Ariete* 27
73. *Esame dell' opera dell' Ariete. Cosa s' intenda per* colpo d' Ariete 28

76. *Scotimento di tutta la macchina nel dare un colpo* . . . . pag. 29
77. *Risultamenti di sperienza. Tanto minore è l' altezza tanto maggiore è la quantità di acqua che vi si porta* ivi
80. *Il crescere la lunghezza del condotto dell' Ariete porta per un verso aumento alla quantità di acqua che s' innalza in un' ora: ma per un altro vi porta scapito* 30
86. *L' aumentar la velocità dell' acqua con la quale l' Ariete dà un colpo, porta per un verso aumento alla quantità di acqua che s' innalza; ma per un altro vi porta scapito* 31
89. *L' acqua dall' Ariete consumata è tanto maggiore quanto più radi sono i colpi* ivi
92. *Escludendo l' aria dalla campana dell' Ariete, il getto è intermittente, ed a poco a poco l' aria vi ritorna da sè* 32
93. *Dichiarazione di altri ingegni per aprire e chiudere l' animella di fermata* ivi
95. *Come l' Ariete giuochi posto anche in un canale di acqua corrente* 33

CAPO VI *Ragione del modo d' operare dell' Ariete* ivi
§ 96. *Ragione di ciò che avviene in un colpo d' Ariete* . . ivi
101. *Perchè l' Ariete alzar debba più acqua quanto è minore l' altezza cui la porta* 34
101. *Giusta la Teorica un Ariete può alzar l' acqua a qualunque altezza. Ragioni per cui talvolta potrebbe non avvenire in pratica* 35
104. *Per qual ragione la diminuzione dell' orifizio per cui entra l' acqua nella campana dell' Ariete arreca per un verso guadagno e per un altro scapito* ivi
106. *Come avvenga che messa che sia in moto la macchina, continui dopo ad aprirsi e chiudersi lo sbocco da sè medesimo* 36

108. *Come avvenga che, aumentando la celerità dell' acqua al momento che se ne impedisce lo sgorgo, si aumenti per un verso la quantità d' acqua che innalza l' Ariete, mentre per un altro si diminuisca* 37
112. *Ragione per cui l'Ariete opera, posto anche in un canale d' acqua corrente* 38
113. *Ragione di ciò che fa l' aria racchiusa nella campana della macchina* ivi

PARTE II.

TEORICA GEOMETRICA DELL' ARIETE.

CAPO I. *Soluzione dei problemi che appartengono al 1.° Fenomeno* 41
§ 119. *Problema I. Si ricerca il tempo che impiega il getto a divenire invariabile nel 1.° fenomeno* . . . ivi
124. *Velocità che ha l' acqua allorchè il getto è invariabile* 45
Formola per esprimere il ricercato tempo ivi
125. *Sviluppo di questa formola in serie* ivi
127. *Problema II. Ricerca della quantità di acqua che sgorga in detto tempo* 47
130. *Formola che esprime questa quantità d' acqua e suo sviluppo in serie* 49
132. *Problema III. Ricerca del tempo che impiega il getto a divenire invariabile, supponendo che la velocità del getto non cominci dall' essere nulla. Sua formola* 50
135. *Problema IV. Si cerca la quantità dell' acqua che sgorga in detto tempo: sua formola* 52
138. *Problema V. Ricerca del tempo e della quantità dell' acqua che sgorga, supponendo la bocca armata d' un telajo che la ristringa. Formole di queste quantità* 54

Capo II. *Soluzione dei problemi relativi al secondo e terzo fenomeno* . . . . pag. 56

§ 142. *Problema I. Si cerca il tempo che impiega il getto a divenire invariabile nel secondo fenomeno, e l'acqua che ne sgorga. Loro formole* ivi

147. *Problema II. Si cerca la misura dello sforzo che l'acqua fluente in un cannello fa sopra una porzione di una cateratta, la quale in un tratto chiuda la bocca del cannello* 58

152. *Problema III. Si cerca la misura dello stesso sforzo sopra una data porzione delle pareti del cannello* 60

156. *Come si possono valutare gli sforzi dell' acqua che tendono a sfiancare le pareti del cannello. Teoremi relativi* 61

Capo III. *Soluzione di alcuni altri problemi necessarj al calcolo dell' Ariete* 63

158. *Problema I. Impedito lo sgorgo dell' acqua nell' aria, ed obbligata così l' acqua ad uscire da una apertura laterale eguale in area alla bocca della canna, ed entrare in un vaso ripieno d' acqua, cercasi il tempo per cui continuerà il fluire dell' acqua nel vaso e la quantità d' acqua entratavi* . 63

168. *Problema II. Poste tutte le cose come nel problema precedente, ma fatta quell' apertura laterale più piccola, si ricerca il tempo e la quantità di acqua come sopra* 66

176. *Problema III. Obbligata l' acqua a tenersi ad una certa altezza in un cannello dalla forza elastica di una mole di aria, se in un tratto quest' aria si riduce a minor volume, ed a lei si lascia poi la facoltà di riprendere il primiero stato, si cerca l' equazione del moto dell' acqua in quel cannello*. 72

Capo IV. *Calcolo dell' opera dell' Ariete* 76

§ 190. *Problema I. Dato un Ariete idraulico, e data l' altezza cui si vuole alzar l' acqua, si cerca la quantità di acqua perduta e quella innalzata in un dato tempo* . . . . pag. 76
Come si suppone che quest' Ariete sia fatto. Egli non ha la campana che contiene l' aria 77
193. *Come si possa calcolare il tempo che il cannello verticale dell' Ariete impiega a riempiersi nei primi colpi* 79
194. *Soluzione del medesimo Problema I, supponendo però che la bocca del condotto sia ristretta dall' orlo cui si appoggia l' animella della fermata* 80
199. *Problema II. Ricerca della velocità che debbe aver l' acqua al chiudersi dell' animella della fermata, onde la quantità di acqua innalzata dall' Ariete sia* massima 83
200. *Considerazioni sopra i Problemi di* massimo e minimo che si possono proporre *nella Teorica dell' Ariete*. 84

PARTE III.

CONFRONTO DELLE TEORICHE CON LE SPERIENZE.

Capo I. *Determinazione delle quantità che si prendono per date nella Teorica geometrica dell' Ariete* 86
202. *Determinazione del coefficiente costante nella formola dell' urto dell' acqua* ivi
206. *Determinazione dell' altezza competente all' acqua che sgorga da un orifizio* 88
207. *Determinazione dei coefficienti costanti che entrano nella formola dell' attrito, incontrato dall' acqua a correre nei lunghi cannelli* 90

217. *Valutazione numerica delle quantità costanti che entrano nella soluzione dei Problemi I, II, III e IV del Capo I, Parte II* . . . . pag. 98
218. *Determinazione dei coefficienti costanti che entrano nella formola della resistenza, incontrata dall' acqua a sgorgare da una canna, la cui bocca guarnita sia di un orlo che la ristringa. Valutazione numerica delle quantità costanti che entrano nella soluzione del Problema V del Capo I, Parte II* . . . ivi
219. *Valutazione numerica delle quantità costanti che si trovano nelle soluzioni dei Problemi del Capo II, Parte II* 100
221. *Valutazione numerica delle quantità costanti che si ritrovano nelle soluzioni de' Problemi del Capo III, Parte II* 101
CAPO II. *Computo numerico dell' Ariete idraulico* 102
222. *Assegnate le dimensioni ad un Ariete, e la velocità dell' acqua nel condotto al chiudersi dell' animella della fermata, si computa in numeri l' acqua innalzata e perduta in un dato tempo* ivi
227. *Tavole numeriche del computo dell' Ariete* 105
CAPO III. *Sperimenti* 108
228. *Dichiarazione della macchina con la quale si sono fatti gli sperimenti, e cautele da aversi nel farli* . ivi
231. *Sperimenti (Nelle Tavole III e IV si avverta che le parole* distanza della ventola = o *significano che la ventola non vi era)* 112
CAPO IV. *Paragone tra i risultamenti delle Teoriche, e quelli delle sperienze* 117
233. *Come s' instituisce questo paragone* ivi
234. *Differenze e cause da cui dipendono* 120
238. *Come gli sperimenti confermino pienamente i principj messi a calcolo nella Teorica geometrica dell' Ariete* 124

Capo V. *Osservazioni sulle sperienze* . . . . pag. 125
239. *Narrazione di alcuni accidenti che si osservano allorchè lavora l' Ariete, e ragione dei medesimi* . ivi
241. *Conferma dei ragionamenti per mezzo di nuove esperienze* 127
243. *Enumerazione delle differenze tra i risultamenti della Teorica e quei della pratica; e ragione per cui debbono seguire* 130

APPENDICE

INTORNO ALL' OPERA DELL' ARIA NELL' INNALZAMENTO DELL' ACQUA.

Art.° I. *Teorica fisica dell' opera dell' aria* 135
§ 1. *Qual differenza passi dal caso nel quale si obbliga una colonna fluida ad introdursi in un vaso ripieno intieramente di acqua e turato con un coperchio, ed il caso nel quale entro quel vaso nascosta sia dell' aria; ragione di questa differenza* ivi
5. *Si rende ragione della forza dell' aria per aumentare l' acqua che s' innalza* 138
6. *Esame della questione: Se l' aumento della mole dell' aria sarà sempre cagione di un aumento dell' acqua innalzata* 139
Art.° II. *Teorica geometrica dell' opera dell' aria* 141
§ 7. *Problema I nel quale si cerca la natura del moto di uno stantuffo obbligato da una percossa a costipare una mole di aria* ivi
13. *Problemi II e III nei quali si cerca la natura del moto del mentovato stantuffo, supponendolo spinto da una colonna fluida continuamente operante su di lui* 147

15. *Problema IV nel quale si cerca la natura dello stesso moto come nei Problemi precedenti, ma in circostanze simili a quelle nelle quali si trova il moto dell' acqua che s' introduce nella campana dell' Ariete* . . . . pag. 149
18. *Problema V nel quale si cerca il tempo e la quantità di acqua che s' innalza in un colpo d' Ariete, mettendo in computo la forza dell' aria racchiusa nella campana* 152
Art.° III. *Confronto dei risultamenti della Teorica con gli Sperimenti* 153
Computo dei dati *dei Problemi dell' Art. II* ivi
Esperimento per assegnare il valore al coefficiente costante che entra nella formola della resistenza dell' aria 154
Computi e tavole delle quantità di acqua innalzate dall' Ariete secondo le formole trovate nell' art. II. 156
Esperienze e concordanze di esse con le Teoriche . . 159
Conclusione 162

FINE.

TRATTATO
DELL' ARIETE IDRAULICO.

Io divido questo trattato in tre parti: do nella prima la Teorica fisica dell' Ariete; nella seconda la Teorica geometrica; nella terza le sperienze ed i confronti loro co' risultamenti delle Teoriche.

PARTE PRIMA.
TEORICA FISICA DELL' ARIETE IDRAULICO.

CAPO PRIMO.
FONDAMENTI DELLA TEORICA FISICA.

§ 1. Ecco i tre fenomeni idraulici su i quali tutta si fonda la teorica dell' ariete:

1.° Fenomeno: Se alle pareti di un vaso M, nel quale l'acqua si conservi livellata in AB, s'innesti una canna orizzontale ED (Fig. 1.) di un tal diametro e lunghezza che l'acqua possa sgorgarne a piena gola dalla bocca EF, succede *Che se in un tratto si apre la bocca EF della canna, onde libera resti l' uscita all' acqua, incomincerà essa a sboccare formando un getto FG che è quasi appiombo; dopo qualche breve momento, il getto andrà a cadere più lontano, divenendo, per modo di dire, FH; in seguito si slontanerà anche di più, fintantochè pervenuto, per esempio, in FL, non si allontanerà più dal luogo ove cadde in principio, se però l' acqua nel vaso M non cresca di livello, ma vi si mantenga continuamente,*

mediante l' affluenza di nuovo fluido, il quale rimpiazzi quello che ne sgorga dalla canna.

§ 2. Chiamo *getto invariabile* il getto FL; e la distanza GL, *ampiezza* o *amplitudine massima del getto.*

§ 3. Riflettendo anche leggermente su di questo fenomeno, facil si è conchiuderne:

COROLLARIO I. Che la velocità della colonna fluida CF contenuta nella canna, è nulla o quasi nulla, allorchè comincia lo sgorgo da EF, e che va sempre crescendo finchè il getto sia giunto in FL, cioè, finchè siasi ridotto invariabile: allora quella velocità è *massima.*

§ 4. COROLLARIO II. Che dall' istante in cui comincia lo sgorgo, sino a quello nel quale il getto diviene invariabile, l'acqua ha nella canna ED un moto accelerato, e di poi un moto equabile ed uniforme.

§ 5. SCOLIO. L'amplitudine GL del getto invariabile dipende dalla velocità dovuta all' altezza dell' acqua nel vaso, modificata però questa velocità dalla resistenza che soffre l' acqua a correre nella lunga canna ED, e dalla resistenza dell' aria che incontra il getto.

§ 6. Conforme all' esposto fenomeno si è quest' altro, che io perciò pongo sotto la stessa indicazione di fenomeno 1.°

Stiano le cose come nel precedente paragrafo, e chiudiamo una porzione della bocca EF (F. 2.), cosicchè non ne resti aperta se non la porzione EI; avviatosi lo sgorgo dall' apertura EI, e formatosi il getto invariabile EK, se tutto ad un tratto si toglie l'ostacolo o impedimento IF, onde la bocca della canna torni intieramente aperta, succede *Che il getto EK diminuisce subito in ampiezza e diviene EH, quindi a poco a poco cresce in ampiezza divenendo invariabile in EL, come nel caso sopra contemplato.* L'unica differenza consiste in questo, cioè, che il punto H ove comincia a cadere il getto, allorchè si apre intieramente la bocca, non è per l'appunto appiombo sotto di essa, ma tanto più se ne allontana, quanto minore era la porzione chiusa della bocca.

§ 7. Anche in questo come nel precedente caso, il moto dell'acqua entro la canna DE, per tutto l'intervallo di tempo che ci corre tra

quel momento in cui si toglie l'impedimento IF alla bocca della canna, e quello nel quale il getto diviene invariabile in EL, è un moto accelerato. In questo caso però la velocità dell'acqua nella canna, al cominciar di questo moto, non è nulla come nell'altro, ma è quella che all'amplitudine GH si conviene.

§ 8. Fenomeno II. Se ad una parete del vaso M, mantenuto costantemente pieno per l'affluenza di nuova acqua, si applica una canna orizzontale DE (F. 3.), come si è detto nel § 1, e si lascia fluire l'acqua dalla bocca, onde il getto rendasi invariabile in EL, succede *Che ristringendo tutto ad un tratto, e per così dire, istantaneamente, la sezione dello sbocco coll'apporvi un impedimento IF, lasciando così aperta solo la porzione della bocca EI, allora il getto diviene subito assai maggiore in amplitudine, facendosi uno spruzzo o zampillo EN, il quale va ad una distanza assai maggiore GN, di quella a cui andava l'acqua sgorgante dalla canna a piena gola. Questo spruzzo o zampillo da quell'istante in cui crebbe d'ampiezza, ne scema successivamente, finchè si fa invariabile in EK, e va a cadere ad una tal distanza GK, che più non si cangia, quando si conservi invariabile l'altezza dell'acqua nella vasca M.*

§ 9. Corollario I. Dunque la velocità dell'acqua nella canna DE, la quale in quell'istante in cui ristringevasi la bocca della canna, diveniva di una certa grandezza, va continuamente scemando finchè il getto non si fa invariabile in EK, e dopo questo momento si mantiene anch'essa costante.

§ 10. Corollario II. Dunque il moto che ha l'acqua nella canna per tutto quel tempo che impiega il getto a farsi invariabile, è un moto ritardato.

§ 11. Fenomeno III. Se chiusa intieramente la bocca EF (F. 3.) della canna, le sue pareti fossero solo capaci di resistere a quella pressione che fa l'acqua su di loro mantenuta nel livello AB, in guisa che si rompessero quando si aumentasse il livello dell'acqua nel vaso M, succede *Che aperta la bocca EF e lasciata libera l'uscita dell'acqua a piena gola, se tutto ad un tratto si chiude a quest'acqua lo sbocco, o in parte s'impedisce, allora quelle pareti si sfiancano,*

e mentre prima erano capaci di resistere alla pressione dell' acqua stagnante, ora non sono sufficienti a sopportare lo sforzo dell' acqua in quel momento che ad essa si toglie o si diminuisce l' uscita.

§. 12. COROLLARIO I. Dunque questo sforzo dell' acqua sulle pareti della canna è maggiore della di lei pressione.

§ 13. COROLLARIO II. Dunque se le pareti fossero capaci di rilassamento senza rompersi, si distenderebbero assai più per causa di quello sforzo, che a motivo di quella sola pressione.

§ 14. COROLLARIO III. Dunque se si ponesse in conflitto il su mentovato sforzo con una pressione eguale a quella che le pareti soffrivano per l' azione del fluido stagnante in AB, quello sforzo vincerebbe.

§ 15. SCOLIO. Questo sforzo può in vero superare pressioni di gran lunga maggiori, anzi qualunque pressione; ma vedremo ciò chiaramente allorchè daremo la spiegazione dei tre annunziati fenomeni.

§ 16. Questi fenomeni succedono ancorchè la canna sia inclinata o abbia diverse figure: io stabilii quelle condizioni per facilitare i ragionamenti da farsi su di essi; del resto

1.° *Ogni qual volta tutto ad un tratto si apre la bocca della canna, l' acqua incomincia ad uscirne non con getto parabolico, ma cadendo quasi appiombo al disotto di essa bocca. Dopo questo primo istante incomincia a poco a poco a formarsi il getto parabolico, il quale cresce per un certo tempo continuamente in amplitudine, finchè giunge a tale che più non si cangia, quando non cangisi l' altezza dell' acqua nel vaso; in consimil guisa avviene ogni qual volta uscendo già l' acqua da una porzione della bocca della canna, tutto ad un tratto s' aumentasse l' orifizio di uscita: il getto in quell' istante diminuisce in ampiezza, e poi, continuamente crescendo, acquista in pochi momenti quell' amplitudine che richiede la bocca aumentata.*

2.° *Ogni qual volta si ristringe istantaneamente l' uscita dell' acqua, il getto subitamente cresce in ampiezza, e dopo quel momento continuamente diminuendo, prende in fine quell' amplitudine che conviene alla bocca ristretta.*

3.° *Per ultimo, ogni qual volta s' impedisce lo sgorgo dell' acqua da una canna, si fa sopra le pareti uno sforzo che le sfiancherebbe, se esse fossero state capaci di resistere alla sola pressione di quell' acqua, allorchè è ridotta stagnante.*

§ 17. Questi fenomeni sono ben facili ad ottenersi; quindi potrei astenermi dal riferire le sperienze nelle quali io gli osservava; pure per render conto di tutto, dirò i modi da me tenuti in queste ricerche.

Verso il fondo di un secchione cilindrico di latta (F. 4.), alto otto decimetri (e qui prevengo che le misure ed i conteggi saranno sempre espressi in metri e parti di metro) cioè alto 0,8, e con un diametro di metri 0,3; io adattava in un foro che a tale uopo eravi fatto, una canna egualmente di latta lunga m.ri 7,0, e con un diametro di m.ri 0,025. Allo sbocco EF eravi saldato un ordigno GH, il quale aveva un incastro ove io faceva entrare una caterattina AB, la quale combaciava sì bene, che era capace d'impedire ogni uscita all' acqua. Se talvolta io voleva che una porzione della bocca restasse aperta, allora io poneva una caterattina ove eravi un foro o di quella grandezza che a me piaceva.

Nel dorso poi della canna, come in P, eravi un altro foro, che io chiudeva con un turacciolotto di legno, e di cui tra poco dirò l' uso. Tanto quell' ordigno saldato alla bocca della canna, quanto le caterattine erano di lamina di ottone grossa m.ri 0,001; così la grossezza di tutto quell' ordigno era poco più di m.ri 0,003.

Sarebbe poi inutile una più minuta descrizione di questo apparato, giacchè ognuno lo può fare e variare a suo talento, e si osserveranno sempre i fenomeni annunziati.

§ 18. Quando io voleva produrre il primo caso del primo fenomeno, io poneva la caterattina AB nell' incastro, come mostra la porzione D della canna segnata nella figura; quindi riempiuto il vaso e la canna di acqua (vaso che io faceva mantenere pieno con l'affluenza di nuovo fluido), con una mano tenendo ferma l' estremità della canna, con l' altra toglieva in un tratto la caterattina, per lo che sgorgando liberamente l'acqua dalla bocca della canna, succedeva appunto quanto ho esposto nel § 1.

Se poi la caterattina incastrata aveva un foro o, come si vede nella porzione H della canna, io lasciava che il getto si facesse invariabile nel foro *o*, e quindi con la su indicata cautela toglieva rapidamente la caterattina, ed allora avveniva il secondo caso annunziato al § 6.

§ 19. Per osservare il secondo fenomeno, lasciata la bocca della canna senza la cateratta, io aspettava che il getto si fosse fatto invariabile, e quindi usando di una grandissima precauzione, rapidamente incastrava nel detto ordigno la caterattina fornita di un foro *o*, e subito si vedeva il getto crescere oltre misura per iscemare poi a poco a poco, come ho dichiarato nell' esposizione del fenomeno.

§ 20. Finalmente per mostrare il terzo fenomeno io faceva così. Tenendo chiusa la bocca EF, io serrava il foro P con un piccolo turacciolo di legno, ed aveva cura di forzare tanto poco questo turacciolo, che, mentre impediva appena l' uscita all' acqua dall' orifizio, potesse essere spinto via quando io avessi cresciuta l' altezza dell' acqua nel vaso; in somma, che egli fosse soltanto sufficiente a resistere alla pressione dell' acqua stagnante: ciò conseguito, io faceva sgorgare l' acqua aprendo la bocca della canna, e quando il getto era invariabile, tutto ad un tratto incastrando la caterattina, io arrestava il corso del fluido. In quell' istante il turacciolo era sempre con violenza lanciato via; e lo stesso avveniva se nella caterattina era un foro o per cui non tutta la bocca della canna restasse chiusa. Quel turacciolo, buono a vincere la pressione dell' acqua stagnante, era sempre vinto dallo sforzo che su di lui faceva l' acqua in moto, allorchè questo era arrestato o almeno impedito.

CAPO II.

SPIEGAZIONE DEI DUE PRIMI FENOMENI IDRAULICI.

§ 21. Se al foro CD, fatto nella sottile parete del vaso M (F. 1.) mantenuto costantemente pieno, applicata non fosse la canna DE, sgorgherebbe l'acqua da quel foro con una velocità, che, giusta la più ricevuta opinione dei Geometri, è quella che un corpo grave acquisterebbe cadendo dall'altezza BC, facendo però la supposizione che il foro sia piccolissimo a fronte dell'altezza indicata e dell'ampiezza AB della vasca. Se quest'acqua sgorgante dal foro CD incontrasse poi un ostacolo prossimo al foro, che tendesse ad impedirne l'uscita, ognuno mi concederà che quell'acqua farebbe un continuato urto sopra quell' ostacolo per ispingerlo innanzi: se poi quest' ostacolo non fosse amovibile, tutta la forza dell'acqua si estinguerebbe in quell' urto: non così però avverrebbe se quell' ostacolo fosse capace di acquistar movimento. Allora esso nel primo istante acquisterebbe, a cagione di quell' urto, un certo grado di celerità, tanto minore quanto maggiore fosse la sua massa, e con questa piccola velocità acquistata in principio, egli scapperebbe davanti all' acqua, che, uscendo dal foro, lo inseguirebbe per urtarlo di nuovo. Nel secondo istante adunque quell' ostacolo riceverebbe, mercè l'urto dell'acqua, un secondo grado di velocità, ma minore del primo; nel terzo istante riceverebbe anche un terzo grado di celerità, ma minor del secondo, e così via discorrendo, finchè quell' ostacolo o corpo che l' acqua fluente incontra nel suo passaggio, avesse acquistata tanta velocità da sfuggire intieramente all' impulsione dell' acqua, o tale, come si dice in Meccanica, che la velocità relativa dell' acqua fosse nulla.

Per meglio comprendere tutto questo basterebbe fingere che l' acqua nell' uscire dal foro CD perdesse la sua gravità (per la cui opera cangiasi il moto rettilineo orizzontale che allora l' acqua prenderebbe, in curvilineo), giacchè questa supposizione non áltera il nostro ragionamento: allora tutto, in questo caso ipotetico, accaderebbe come in quello del moto di una vela spinta dal vento,

o di un galleggiante strascinato dalla corrente di un fiume, considerati i due movimenti prima che siano giunti all' equabilità.

§ 22. Io ho diviso in istanti il tempo nel quale si fa questa comunicazione di moto, ed ho supposto che essa segua, per dir così, ad intervalli separati; ma l' ho fatto solamente per comodo di spiegazione; del resto, l' effetto dell' acqua sopra quel corpo è continuo, e dura finchè il corpo non abbia ricevuta tanta velocità da sfuggire l' urto dell' acqua che lo insegue.

§ 23. Ora la colonna fluida contenuta nella canna orizzontale, e che per essere orizzontale non può da sè medesima darsi alcun moto, è appunto quell' ostacolo o quel corpo che l'acqua, nell'uscire del vaso pel foro CD, incontra nel suo passaggio, e che essa urta e spinge avanti, come abbiamo diffusamente spiegato nel caso immaginato. Quella colonna adunque di fluido dal momento in cui è aperta la bocca EF della canna, dal momento, cioè, in cui lo sforzo che l'acqua del vaso fa per uscire, è libero di operare, incomincia ad acquistare un primo e piccolissimo grado di velocità; quindi ne acquista un secondo, poi un terzo, e così di mano in mano finchè sia divenuta tanto veloce, che l' acqua sgorgante dal foro CD non possa più operare su di lei.

§ 24. Nè faccia difficoltà che una porzione della colonna fluida contenuta nella canna orizzontale, esca continuamente della bocca EF, perchè altrettanta appunto ne passa dal foro CD nella canna medesima, e quindi la massa dell' acqua della colonna che debbe spingersi innanzi, rimane la stessa.

§ 25. Ma tutto questo ragionamento si può anche presentare sotto un aspetto più chiaro. L' acqua contenuta nel vaso M esercita una forza nel luogo CD per ispingere fuori il fluido: ora dal momento che si apre la bocca EF della canna, questa forza che è sempre costante finchè l' acqua si mantiene al livello AB, opera per ispingere avanti la massa fluida della colonna DE; nel primo istante dunque essa le comunicherà un primo grado di velocità, tanto minore quanto maggiore sarà quella massa; nel secondo istante, quella forza continuando ad operare, comunicherà alla colonna fluida un

altro grado di velocità ma minore del primo, perchè avendo l' acqua ricevuta qualche celerità, sfugge l' urto di quella forza, e così via discorrendo, finchè l' acqua nella canna abbia acquistata tanta celerità, che quella forza più non possa operare su di lei.

§ 26. Ora l' amplitudine del getto fluido che esce dalla bocca EF della canna, dipendendo dalla velocità che l'acqua ha nell' uscire, dovrà dunque, appunto come dichiara lo sperimento, esser questa amplitudine del getto quasi nulla in quel primo momento in cui apresi la bocca EF, cioè in quello in cui comincia l' acqua a fluire; giacchè allora la velocità nella canna ED è incipiente, vale a dire, può considerarsi come nulla.

In seguito crescendo la celerità, crescere ancora debbe quell' amplitudine, che massima diverrà quando pure sia massima quella velocità.

§ 27. Corollario I. Dunque il moto dell' acqua nella canna avanti che il getto divenga invariabile, debb' essere accelerato, ma non uniformemente; in fatti se col pensiero si divide in picciolissimi istanti quel tempo che ci corre dal momento in cui il moto dell' acqua nella canna DE incomincia, ed il momento nel quale la celerità si fa massima, in ognuno di quegl' istanti cresce effettivamente la velocità dell' acqua; e questi aumenti, come noi abbiamo dimostrato, non sono eguali, ma vanno decrescendo; quindi quel moto è accelerato, ma non uniformemente.

§ 28. Corollario II. Quegli aumenti di velocità essendo tanto maggiori quanto più corta è la canna DE, ovvero quanto è minore la mole della colonna fluida in lei contenuta, ne viene di conseguenza che minor tempo impiegherà il getto a divenire invariabile quanto è minore la lunghezza della canna; di fatto, mantenute eguali le altre circostanze, se adatteremo al vaso una canna, ora di sei metri, ora di un metro, ed osserveremo che in questi due casi le due velocità dei getti invariabili esser debbono eguali (non valutando però la resistenza che produce l' esteso toccamento dell' acqua con le interne pareti della canna), facil sarà il concluderne che dovrà impiegarsi minor tempo quando i gradi pei quali si perviene

a quella velocità finale, sono maggiori; e questo, a tenore di quanto si disse, avviene appunto nella canna più corta: la forza che genera il movimento, è, tanto in un caso quanto nell' altro, la stessa; ma la massa che essa debbe muovere è sei volte maggiore nella canna più lunga.

§ 29. Scolio. Le sperienze da me fatte hanno comprovato tutto questo, ed in pari circostanze ho sempre ritrovato che minor tempo ci voleva ad ottenere il getto invariabile, a misura che la canna era più corta. E qui avverto che, volendo io in questa prima Parte soltanto esporre la Teorica fisica dell' Ariete idraulico, vado per questo rintracciando ed assegnando le cause naturali, dalle quali dipendono le operazioni di quella macchina. Io determino quando e le cause e gli effetti loro sono maggiori o minori, e se gli uni crescono o scemano in confronto degli altri, ma non assegno già la misura e la stima, o, come sogliono dire i Geometri, il *quantum* di quelle e di questi. Per ciò, nel citare le sperienze, io dico se corrispondono esse ai risultamenti di quei ragionamenti, ma non indico già con precisione quali siano questi risultamenti, non gli assegno, cioè, in numeri. Nella seconda Parte ove guidato dalla Geometria tratterò queste dottrine, ne stabilirò allora le precise misure.

E qui debbo dichiarare che riguardo alla velocità con la quale comincia il getto, dissi che questa debb' essere nulla o quasi nulla; ma ciò solo è rigorosamente vero quando il diametro EF è molto picciolo, pel che i filetti acquei situati in F, poca velocità aver possono in virtù della pressione dei filetti superiori; chè quando fosse di considerabil grandezza quel diametro, allora il getto comincerebbe con una velocità di qualche grandezza.

§ 30. Il secondo caso del primo fenomeno, contemplato al § 6, non è difficile a capirsi a causa di ciò che sin ora si è detto. Allorchè alla bocca EF della canna togliesi l' ostacolo IF, l' acqua che sgorgava da EI con una certa velocità, incomincerà ad uscire da EF con una velocità tanto minore, quanto l' area di EI sarà minore di quella di EF; incomincerà, cioè, ad uscir l' acqua con quella velocità con la quale essa correva per entro della canna,

prima della remozione dell'ostacolo su mentovato, e l'amplitudine del getto in quell' istante dipenderà dunque da questa velocità; ora la forza che l'acqua contenuta nel vaso al livello AB, fa per iscacciare il fluido fuori del vaso medesimo, s'impiegava prima della remozione dell' ostacolo a battere l'ostacolo stesso, ed a far correre l'acqua nella canna con quella tale velocità: se dunque si toglie l'ostacolo, non sarà essa forza più bilanciata, e quella porzione di lei che si estingueva dall' ostacolo, si eserciterà a generare nuova velocità in quella colonna fluida DE: dunque la celerità con la quale sgorgava il getto, crescerà successivamente, con gradi però di mano in mano minori, e simili aumenti riceverà anche l'amplitudine del getto, il quale in fine si farà invariabile: del resto tutto avviene come nel primo caso; l'unica differenza si è che quel moto accelerato (concepito dall' acqua prima di giungere al moto equabile) incominciava nel primo caso con una velocità nulla, o, come dicono alcuni, *infinitesima*; e nel secondo con una velocità *quanta*, o, come sogliono dire i Geometri, *finita*.

§ 31. COROLLARIO. Le cose da noi dette sul modo col quale il getto si fa invariabile, ci dichiarano che la quantità di acqua sgorgante dalla bocca della canna, prima che il getto sia giunto alla sua massima ampiezza, sarà maggiore o minore a misura che il getto ha bisogno di più o meno tempo per farsi invariabile; così quanto più lunga sarà la canna (§ 28), tanta maggior quantità di acqua uscirà prima che il getto divenga invariabile. In fatti, non contando le resistenze (le quali poca alterazione producono, se la canna non sia molto angusta), se si suppone che la canna abbia diverse lunghezze, le amplitudini dei getti invariabili, e quindi le velocità finali nei due casi saranno eguali, e cominciando esse dallo zero, ne segue che maggior quantità di acqua uscirà, quando essa impiegherà maggior tempo a concepire quei diversi gradi di celerità.

§ 32. Per la spiegazione del secondo fenomeno io la discorro così: Se il ritegno che tutto ad un tratto si pone all' uscita dell'acqua, mercè quel subitaneo ristrignimento del foro, ritardasse egualmente e nel medesimo istante appunto appunto questo fluido per tutta

l' intiera lunghezza della canna, certo è che il getto in quello stesso istante prenderebbe quell' amplitudine GK, che è adattata allo sbocco ristretto, e che acquista dopo alcuni momenti; ma in una massa fluida la quale, pigiata da una banda, abbia qualche libertà di estendersi e rigonfiarsi in altre bande, l' esperienza ci mostra che ci vuole un tempo di qualche durata ad imprimere o diminuire un movimento da un capo all' altro di quella massa; quindi è che nell' istante in cui ristringesi lo sbocco dell' acqua, l' opera di quel ritegno non si risente dall' acqua che trovasi a qualche distanza indietro dalla bocca, e per conseguenza continua questa a correre con la stessa celerità, e non la perde che a poco a poco per ridursi a quella che si conviene al getto invariabile della ristretta bocca della canna.

§ 33. Ora dovendo da quel foro o sia sbocco ristretto passare in ogni momento tant' acqua, quanta ne passa da qualunque sezione della canna, bisogna che la velocità che l' acqua dovrà avere in quel foro EI, sia sempre tanto maggiore di quella che nello stesso istante ha l' acqua in una sezione della canna, quanto l' area di questa sezione è maggiore di quella dell' orifizio EI; dunque nel momento del ristrignimento dello sbocco, la velocità dell' acqua che sgorga dalla ristretta bocca della canna, dovrà essere tanto maggiore di quella che l' acqua aveva in una sezione della canna prima di quest' epoca, o che aveva nella di lei bocca libera, quanto l' area di quella sezione o della bocca libera è maggiore dell' area della bocca ristretta.

§ 34. Negl' istanti che seguono quello nel quale si fa il ristringimento, diminuendo sempre la celerità dell' acqua nell' indicata sezione per causa appunto dell' opera di siffatto ristringimento, la quale, come si disse, a poco a poco si comunica, anche la velocità dell' acqua che sbocca, diminuirà nella proporzione da noi indicata, finchè si ridurrà a quella che aver vi debbe il getto invariabile.

§ 35. Ma per ispiegarmi più chiaramente, indichiamo per S l' area della bocca EF della canna, che nel nostro caso eguaglia l' area

di una qualunque sezione della canna stessa: ristringasi tutto in un tratto lo sbocco EF e riducasi ad EI la cui area sia α. Se questo impedimento che si pone all'uscita dell'acqua, si propagasse nel medesimo istante sopra tutta l'acqua contenuta nella canna, il getto che spiccia per EI, si farebbe incontanente invariabile; e chiamando v la di lui velocità, l'acqua incomincerebbe subito in quell'istante medesimo a scorrere nella canna con una velocità eguale ad $\frac{v\alpha}{s}$.

Ma quell'ostacolo non produce tutta la sua influenza che in alcuni istanti. Siano essi, per esempio e per facilità di ragionare, sei. Supponiamo di più che quell'effetto non si comunichi continuamente, ma a gradi ed a salti. Siano questi sei, e se ne comunichi uno alla fine di ciascun istante. È manifesto che nel primo di quei momenti, la velocità della canna non essendo ritardata, e dovendo per qualunque sezione di essa passare la stessa quantità di acqua che passa per la bocca EI ristretta, se V indica la velocità dell'acqua pria del ristrignimento, sarà $\frac{Vs}{\alpha}$ la velocità con la quale incomincerà lo zampillo per EI. Alla fine di quel primo istante, risentendosi dall'acqua scorrente nella canna, il primo grado di ritardamento, la velocità V diminuirà, e per tutta la durata del secondo istante diminuirà pure nella stessa proporzione la velocità dello zampillo.

Lo stesso avverrà nel terzo istante, finchè, compintosi in sei istanti tutto l'effetto dell'ostacolo, il getto diverrà invariabile nel foro EI, l'acqua scorrerà con equabil movimento, e quindi la velocità dell'acqua nella canna e la velocità dell'acqua al passaggio del foro EI saranno ridotte a quelle grandezze che convengono all'altezza dell'acqua nel vaso, alla lunghezza della canna ed alle porzioni chiusa ed aperta della bocca; dopo questo stato di cose più non si cangeranno quelle velocità, se non cangiansi alcune delle indicate circostanze.

§ 36. Corollario. Dunque la prima velocità, con la quale l'acqua spiccia dall'orifizio nell'istante del ristrignimento, sta a quella con

la quale l' acqua sgorgava da quell' orifizio prima del ristrignimento medesimo, come sta l' area dell' orifizio, in questo secondo caso, all' area nel primo.

§ 37. Ma in che consiste l' opera dell' ostacolo che si pone alla uscita dell' acqua col ristrignere una porzione della bocca della canna? Noi abbiamo detto che questo ristrignimento produce un ritardamento; che questo ritardamento si comunica a poco a poco all'acqua scorrente nella canna, e posta l'incompressibilità dell'acqua, abbiamo mostrato come necessariamente debbono comporsi tra loro le velocità dell'acqua nella canna e nella bocca ristretta, finchè dura l' opera dell' ostacolo; noi abbiamo detto come debbono essere le cose; dobbiamo ora ricercare per qual via la natura le riduce appunto in quel modo. Ciò faremo dopo avere data la spiegazione del terzo fenomeno, giacchè essa ci farà scoprire in che consiste l' opera di quell' ostacolo.

CAPO III.

SPIEGAZIONE DEL TERZO FENOMENO IDRAULICO SUL QUALE È APPOGGIATA LA TEORICA DELL' ARIETE.

§ 38. L' urto diretto dei fluidi si misura col peso di un prisma fluido, che abbia per base la superficie urtata, e per altezza quella che si conviene alla velocità della colonna fluida che urta, o, secondo alcuni autori, con un peso di un cilindro doppio di questo, o, secondo altri, di altra grandezza che qui non mi preme di assegnare. Da ciò segue che l'urto dei fluidi è sempre commensurabile con la pressione, avvegnachè ambedue questi effetti si misurano con un peso; e potrà sempre trovarsi una pressione che eguagli un dato urto.

Ciò però è vero nell' ipotesi che riguardando la vena fluida come formata d' infinite sottilissime falde di acqua, queste, urtando una dopo dell' altra, si annientino e, per dir così, spariscano dopo aver fatto la loro percossa: in questa guisa una falda cedendo sempre

il luogo all' altra che la segue, non possono mai molte falde di fluido fare nello stesso tempo impulsione sull' ostacolo.

Se ora si potesse fare in modo che non una sola per volta fosse la falda che urta, ma due, tre, quattro ecc. cento insieme fossero quelle falde che vanno a percuotere la superficie, è manifesto che due, tre, quattro ecc. cento volte quell' urto sarebbe maggiore di prima, e quindi maggiore di quella pressione a cui dianzi equivaleva, cioè quando l' urto si faceva da una sola falda fluida per volta; così l' urto di una colonna d' argento vivo sarà quattordici volte (poste eguali tutte le altre circostanze) maggiore di quello di una simil colonna di acqua, perchè ogni falda di mercurio, per sottilissima che sia, è sempre eguale in massa a circa 14 falde di acqua le quali abbiano le stesse dimensioni che quella.

§ 39. Col racchiudere la vena fluida in una canna, e coll' arrestare tutto in un tratto il moto dell' acqua in quella canna, chiudendone la bocca, si obbligano appunto tutte le falde acquee che compongon la colonna fluida, ad urtare ~~ed estinguere~~ il loro moto nel medesimo tempo, e per ciò a fare un urto tanto maggiore della pressione (cui equivarrebbe l' urto di quella vena fluida, se fosse libera e non racchiusa nella canna) quanto la lunghezza della canna è maggiore della grossezza di una falda che urta, e questa ragione essendo quella del *finito all' infinitesimo*, ne segue che quell' urto della vena fluida rinchiusa dovrà superare qualunque urto di vena libera, e quindi qualunque pressione; avvenendo appunto qui come nell' urto dei corpi solidi, il quale è sempre infinito, se con un peso si paragoni.

§ 40. Fingiamo ora, come nel terzo fenomeno, che sia aperta la bocca EF della canna, che da essa sgorghi l' acqua a piena gola, e che la velocità del fluido sgorgante sia V. Se tutto ad un tratto si chiudesse con una cateratina quell' orifizio, tutta la massa della colonna fluida rinchiusa nella canna, e ch' era dotata della velocità V, perderà il suo moto, facendo un' impulsione sopra ciascun punto fisico della cateratina e delle pareti della canna, la quale impulsione dipenderà dal momento della massa di quella colonna

moltiplicata per la velocità V. Essendo adunque questa impulsione sempre maggiore di una pressione, è giocoforza che quelle pareti, le quali erano solo capaci a resistere alla pressione dell'acqua stagnante, non possono resistere a quella violentissima percossa, che sopra di esse fa la colonna fluida tutto in un tratto fermata, come appunto ci mostra quel terzo fenomeno.

§ 41. Ma dirà taluno: Dovrà dunque la su mentovata forza di percossa vincere qualunque robustezza di pareti, se è vero ch'essa superi qualunque benchè grandissima pressione. Questo appunto avverrebbe se le pareti fossero di materia tanto rigida, che non potessero sopportare alcuno benchè piccolo rilassamento senza fendersi; ma siffatta materia non esiste in natura. Quel momento dell'acqua, allorchè se ne arresta lo sgorgo, non si annienta in un istante indivisibile di tempo, ma le pareti, con moto ritardato distendendosi, lo estinguono a poco a poco, e finchè non abbiano ricevuto il massimo distendimento, aumentano la capacità della canna che l'acqua fluente riempie a misura che questa velocità si forma.

Giunte le pareti a questa massima dilatazione, sarebbe terminato ogni moto, se per la loro elasticità la canna non tornasse al primiero calibro, serrandosi, per dir così, addosso all'acqua.

§ 42. In questo ritorno, che segue ancora esso con moto variabile ma ritardato, debbe vincersi la pressione che fa l'acqua sopra quelle dilatate pareti; pressione che, come è noto, dipende dall'altezza dell'acqua nel vaso il quale la somministra alla canna. In principio questa pressione è vinta; ma a poco a poco scemando la forza delle pareti col loro avvicinarsi allo stato naturale, tutto si pone in equilibrio; anzi, col ristringersi la dilatata capacità della canna, l'acqua che la riempiva, è giocoforza che torni indietro e tenda in conseguenza a distaccarsi dalle pareti medesime; in questo tornare indietro e tendere a distaccarsi dalle pareti, essa cessa di premere o almeno diminuisce la pressione sopra di quelle.

§ 43. Corollario I. Risulta dalle cose dette fin ora, che quanto maggiore sarà la colonna fluida che si arresta, e la velocità di cui è dotata, tanto maggiore sarà la spinta di lei sopra le pareti,

il distendimento di queste, e la quantità d'acqua che torna indietro nella canna, quando esse si ristringono.

§ 44. COROLLARIO II. Dunque quanto è più lunga la canna, quanto ne è maggiore il diametro, quanto maggiore è l'altezza dell'acqua nel vaso, tanto maggiore sarà la percossa sulle pareti, il loro distendimento e la quantità di acqua che retrocede.

§ 45. Per rendere manifesti questi risultamenti, io feci la canna di cuoio, cui adattai con cura il meccanismo da me descritto (§ 17), per dare istantaneamente l'uscita all'acqua o per toglierla. Il primo mezzo metro di canna verso il vaso era di vetro, e bene si connetteva col vaso e con la canna di cuoio.

Facilmente poi con l'occhio e con la mano poteano riconoscersi i distendimenti ed i ristringimenti delle pareti, allora quando tutto ad un tratto si toglieva l'uscita all'acqua. Io aveva nella canna di vetro collocata una pallina di suvero attaccata ad un filo lungo due decimetri. Mentre l'acqua correva entro la canna, quel piccolo globetto di legno con la sua agitazione e col distendere il filo ce ne avrebbe potuto dare l'indizio, se noi non lo avessimo saputo; allorchè però si chiudeva lo sbocco, quel corpicciuolo col suo retrocedere ora più, ora meno, faceva, in certo modo, la spia della quantità dell'acqua che tornava indietro; e noi abbiamo sempre osservato che, fatte le canne dello stesso diametro, il suvero retrocedeva moltissimo più quando la canna era di cuoio, che quando era di latta; e poste tutte le altre cose eguali, questo retrocedimento dell'acqua era maggiore, quanto più lunga era la canna.

§ 46. Io ho detto che mentre le pareti della canna tornano al suo stato, si serrano, per dir così, addosso all'acqua in esse contenuta, che la respingono indietro, e che per tal motivo essa tende allora ad allontanarsi da queste pareti, e che per ciò essa fa minor forza di pressione su di loro; ma non bisogna credere che in questo retrocedere che fa l'acqua, si faccia nella canna un vôto, giacchè torna indietro soltanto tant'acqua, quanta se ne era ingolfata di più nella canna, mercè la dilatazione delle sue pareti. Io me ne sono assicurato con molte sperienze. Se quel vôto si fosse

formato, l'acqua dopo aver retroceduto avrebbe dovuto tornare di nuovo a riempiere il vôto lasciato, e quella pallina di suvero, non che gli altri bruscoli sparsi nell'acqua, me lo avrebbero assolutamente indicato; ma ciò non è avvenuto mai, ad onta che io facessi l'esperienze a bella posta per un tale oggetto, e quindi rendessi tutte le circostanze favorevoli a produrre quel risultamento.

§ 47. Corollario. Se un pezzetto delle pareti della canna sarà fatto a guisa di un'animella che si apra dal di fuori della canna al di dentro di essa, avverrà dunque che, in tutti quegl'istanti nei quali continua il ristrignimento delle dilatate pareti e quindi il ritorno dell'acqua, l'acqua premendo meno su di quelle, ed inclinando a distaccarsi da esse, farà lo stesso sopra l'interna superficie di quell'animella, la quale è parte delle dette pareti, e per questo l'aria esterna, aggravandosi sopra l'animella medesima, l'aprirà per introdursi nella canna: questo è il caso di quella che Bernulli ha chiamata pressione negativa, per cui in una canna entro della quale velocemente corra dell'acqua, se apresi un foro ove sia adattato un cannellino, che peschi in un vasetto di acqua, si vede non l'acqua della canna scendere nel vasetto, ma, al contrario, quella del vasetto salire nella canna, e pure non vi si faceva alcun vôto, ma l'acqua in essa corrente ne premeva meno le pareti.

§ 48. Ritorniamo adesso, come si promesse (§ 37) al secondo fenomeno. Supponiamo che in un subito resti chiusa non tutta la sezione dello sbocco EF (F. 3.), ma solo una sua porzione FI: egli è certo che la colonna fluida impedita nell'uscire, è quella che ha per base IF; ed il momento di moto che debbe distruggersi, è la massa di questa colonna moltiplicata nella sua velocità. Ora con questo momento l'acqua fa uno sforzo per distendere le pareti, e per ispingere fuori della canna con maggiore celerità quella colonnetta acquea la cui base è IE, ed il cui movimento non è rimasto impedito, giacchè si lasciò aperta la porzione IE del foro.

Questa è quella forza, il momento cioè della colonna di acqua fermata, la quale, in quel primo istante in cui ristringesi lo sbocco della canna, aumenta la velocità che aveva l'acqua non impedita,

e l'aumenta di tanto, di quanto diminuì la sezione dello stesso sbocco; nè può aumentarla di più, poichè, giunta la velocità a tal segno che dal foro ristretto passi tanta acqua, quanta in quello istante ne passa in una sezione della canna, non vi è più alcun altro momento di forza da estinguersi.

§ 49. Quello stesso momento di forza nell'operare ch'ei fa per distendere le pareti, e per cacciar fuori l'acqua con maggiore velocità dalla porzione della bocca IE, opera sull'acqua della canna per respingerla indietro, e ad essa toglie un primo grado di celerità; ed ecco in che consiste l'effetto dell'ostacolo posto all'uscita dell'acqua. Nel secondo istante si è già sentito qualche ritardamento dall'acqua; quindi la colonna fluida che allora viene impedita, ha un minor momento di forza da distruggersi; e con questo fa uscire nel secondo istante dal foro IE ristretto tanta acqua, ch'eguagli quella che allora passa da una sezione della canna; e così continua finchè il getto abbia acquistata quell'ampiezza che allo sbocco IE si conviene.

§ 50. Corollario I. Dunque tanto maggior tempo impiegherà il getto a divenir invariabile nel foro IE, quanto maggiore sarà la massa della colonna fluida, della quale debbe a poco a poco da quell'ostacolo distruggersi una parte di movimento, quanto maggiore, cioè, sarà la lunghezza della canna, poste eguali le altre circostanze.

§ 51. Corollario II. Dunque, ad eguali circostanze, la quantità di acqua che fluisce mentre quel getto diviene invariabile, sarà tanto più grande, quanto maggior tempo impiega il getto ad acquistare quella massima amplitudine.

§ 52. Noi abbiamo sempre supposto che il ristringimento della bocca EF avvenisse a getto invariabile; se questo ristringimento si facesse quando il getto (F. 3.) non è per anche giunto a quello stato, allora nell'atto del ristringimento scapperebbe in vero da IE l'acqua con la velocità, giusta la regola del § 35, ma negli istanti successivi la cosa non anderebbe per l'appunto come si è detto pel getto invariabile; imperciocchè insieme a quella causa

ritardatrice, prodotta dall' ostacolo IF, opererebbe sull'acqua contemporaneamente ancora la forza acceleratrice, la quale sussisteva sempre, non essendo il getto giunto alla sua massima ampiezza; quindi la natura del moto dell' acqua in questo caso dipende dalla natura di quelle due forze contemporanee che operano sull'acqua, una delle quali inclina ad accelerare, l' altra a ritardare il moto del fluido.

§ 53. Quando poi, essendo il getto invariabile, si aumentasse o si diminuisse l' altezza dell' acqua nel vaso nell' istesso istante precisamente nel quale si fa il ristringimento della bocca EF, è manifesto che il moto dell' acqua nel primo caso dipenderebbe da due forze contemporanee come nel § antecedente, e nel secondo caso da due forze egualmente contemporanee, ma ambedue ritardatrici.

CAPO IV.

CONSEGUENZE DELLE ESPOSTE DOTTRINE.

§ 54. Se nel dorso della canna orizzontale DE (F. 5.) vi sarà fatto, vicino alla bocca EF, un foro p, e si lascerà quindi sgorgare l' acqua a piena gola dalla bocca EF, non uscirà da quel foro acqua, giacchè ivi è allora nulla la pressione del fluido. Quando poi tutta ad un tratto si chiuderà la bocca EF con la caterattina AB, allora l' acqua sboccherà dal foro p, e mercè l' incompressibilità dell' acqua, lo sgorgo da p si farà con la medesima forza, ed avverrà esattamente nel modo stesso che avverrebbe se quella apertura non fosse in p, ma nella stessa cateratta AB; ovvero, come se la cateratta non tutta chiudesse la bocca EF della canna, ma ne lasciasse aperta una porzione eguale in area allo stesso pertugio p; e qui non valuto quella piccola difficoltà, che può incontrare l' acqua per non essere il foro p posto nella direzione del di lei movimento, e perciò non così favorevole allo sgorgo, come sarebbe se ei si ritrovasse nella stessa caterattina AB.

§ 55. Corollario I. Dunque il moto che prende l' acqua nella canna DE, e lo sbocco di lei dal foro p, allorchè è tutta ad un

tratto obbligata a fluire da esso, trovansi nelle stesse circostanze, come se questo pertugio fosse nella cateratina che chiude la bocca EF.

§ 56. Corollario II. Dunque se tutto in un tratto intieramente si chiuda la bocca della canna EF e non resti altro passaggio all'acqua che dal foro p, sarà in quell'istante del chiudimento la velocità dell'acqua che scappa dal foro p, tanto maggiore di quella con la quale l'acqua sgorgava dalla bocca EF, quanto l'area di questa bocca è maggiore dell'area del foro p.

§ 57. Corollario III. Dunque se il foro p si farà eguale in area alla bocca della canna, l'acqua (astraendo dal moto dell'acqua la difficoltà che un'apertura laterale cagiona all'uscita) sgorgherà con la medesima celerità, con la quale fluiva dalla bocca.

§ 58. Scolio. Quando poi si volesse valutare la mentovata difficoltà, allora converrebbe fare l'area del foro p tanto maggiore, che l'aumento dell'area, facilitando l'uscita dell'acqua, compensasse quella difficoltà. Di questo aumento però non si dovrebbe tener conto nel fare la menzionata proporzione (§ 35).

§ 59. Corollario. Siccome la velocità, con la quale l'acqua scappa dal foro p, allorchè tutto ad un tratto intieramente si chiude la bocca della canna, dipende solamente dal rapporto della di lei area con quella del detto foro p, così la lunghezza della canna nulla ha che fare nella misura di questa velocità; e se l'area del foro p è, per esempio, un quarto di quella di EF, la velocità dell'acqua che fluisce dal foro p, sarà, nell'indicato istante, quadrupla di quella che aveva l'acqua allorchè si chiuse la bocca EF, qualunque siasi la lunghezza ED della canna.

§ 60. Fingiamo ora che il foro p si chiuda col porvi sopra una lastra pesante. Allorchè nel chiudere tutta in un subito la bocca EF, s'impedisce lo sgorgo all'acqua, seguiranno due effetti uno dopo dell'altro, i quali conviene che siano tra di loro distinti. Il primo si è che quella lastra pesante sarà allontanata dal foro p; ed il secondo si è che, restato aperto il foro medesimo, l'acqua da esso scapperà fuori, come si è indicato qui sopra.

Questi due effetti seguono in vero l'uno dopo l'altro, ma non può commettersi errore di conseguenza, stimandoli contemporanei.

§ 61. Supponiamo che il pertugio EF sia fatto nella parte inferiore della canna; che il foro p sia la stessa bocca della canna, la quale metta foce in un vaso M', ove l'acqua trovisi livellata con quella del vaso M. Avanti al foro p nel vaso M' siavi un'animella H, la quale, chiudendosi, impedisca il passaggio all'acqua dal vaso M' nella canna CF, ed aprendosi lo permetta.

Avviato il getto per la bocca EF, se tutto ad un tratto si chiude la bocca stessa, l'acqua sarà obbligata ad aprirsi un passaggio dal foro p nel vaso M'. Sia l'area del pertugio p eguale a quella del foro EF. La forza della colonna acquea moventesi aprirà l'animella H, e l'acqua principierà ad entrare nel vaso M'. Se la velocità con la quale sboccava il getto dal foro EF nel mentre che questo si chiuse, era V, con tale velocità ancora principierà l'acqua ad entrare nel vaso M'. Questa velocità però anderà poco a poco scemando fino a ridursi a nulla, ed allora cesserà ogni sgorgo di acqua nel vaso M'.

§ 62. Supponiamo ora che a misura che dal condotto passa acqua nel vaso M', questa trabocchi al disopra del livello A'B', onde non possa elevarsi a maggiore altezza. Allora nello stesso modo appunto col quale l'acqua del vaso M ha comunicata a gradi a gradi la velocità V alla colonna fluida contenuta nella canna, l'acqua del vaso M' glie la toglierà egualmente a gradi a gradi fino a ridurla a niente.

Un ragionamento simile a quello da noi fatto sopra (§§ 21 a 26) conduce a questo risultamento. Solo conviene avvertire che ivi considerammo l'urto continuo dell'acqua sgorgante da CD sopra la colonna fluida per ispingerla innanzi; e qui conviene considerare l'urto che questa colonna fa per entrare nel vaso M', cioè la resistenza che incontra. Nei due casi quella colonna acquea opera come un corpo solido; nel primo egli è spinto innanzi da un fluido e soffre quindi l'urto del fluido; nel secondo è egli stesso che spinge il fluido, e ne soffre in conseguenza la resistenza.

§ 63. Corollario I. Il moto dell' acqua nella canna DE in tutto quel tempo che impiega la velocità V ad estinguersi, cioè in tutto quel tempo che l' acqua continua ad entrare nel vaso M', è un moto ritardato.

§ 64. Corollario II. Se l' acqua non traboccasse a misura che nel vaso M' s' introduce, allora tanto più presto la velocità V si ridurrebbe a nulla; tanto minor quantità di acqua entrerebbe nel vaso M', ed il moto dell' acqua nella canna sarebbe tanto più ritardato, quanto maggiore diviene l' altezza dell' acqua nel vaso M'.

§ 65. Corollario III. Se il livello A'B' fosse più alto di AB, allora chiudendosi la bocca EF ed incominciando l'acqua ad entrare dal pertugio p nel vaso M', il tempo per cui dura questo fluire dell' acqua, e la quantità d' acqua che in tal tempo fluisce, sarebbero minori di quello che se nei due vasi si trovasse il fluido allo stesso livello; e se quel livello A'B' fosse stato più basso di AB, quelle due quantità di tempo e d' acqua sarebbero state maggiori.

§ 66. Quando il foro p si facesse minore di EF, allora la velocità (§ 35) con la quale l' acqua comincerebbe ad entrare nel vaso M' sarebbe tanto maggiore di V, quanto l' area EF è maggiore di quella di p; questa velocità poi diminuirebbe sino a ridursi nulla, non solo per causa del ritardamento che fa il ristringimento dello sbocco, da noi spiegato di sopra, quanto per la resistenza dell'acqua del vaso M', la quale si oppone e contrasta l'ingresso di nuovo fluido.

§ 67. Corollario. Dunque per causa di quella maggiore velocità di cui l' acqua è dotata allorchè si fa il foro p minore di EF, durerà per più tempo lo sgorgo dell' acqua nel vaso M', e quindi per due ragioni entrerà più acqua nel detto vaso; ma da un altro canto, a motivo, cioè, della minor larghezza del foro, quell' acqua diminuirà; dal che si può concludere che ci sarà una certa tal quale larghezza del foro p, la quale farà sì che l' acqua entrata sia *massima*.

§ 68. Nulla abbiamo detto della lunghezza della canna ED, ma facilmente dalle cose discorse ricavasi che quanto più lunga sarà

la canna, tanto maggiore sarà il tempo nel quale l'acqua continuerà ad entrare nel vaso M', e tanto maggiore l'acqua entrata.

CAPO V.

DICHIARAZIONE DELL' ARIETE E DEL SUO MODO DI OPERARE.

§ 69. Per quanto l'Ariete idraulico si componga in diverse fogge, pure tutte queste apparenti diversità non cambiano il suo modo di operare.

Io descriverò adunque quella macchina che ho fatto lavorare, e le di cui esperienze ho registrate per servire di confronto alle Teoriche. Io credo di avervi arrecata qualche semplicità, e l'ingegno che ho fatto per dare attività alla parte principale dell'Ariete, è forse il pregio migliore della mia macchina, giacchè con esso si pone, per dir così, sott'occhio la causa per cui l'acqua è innalzata dalla macchina al disopra del livello della vasca.

§ 70. La *Tavola* II contiene i disegni del nostro Ariete. La Figura 1 rappresenta la macchina tutta montata per fare gli sperimenti, tale quale allora comparisce agli occhi di chi la riguarda di fianco. M è una vasca della quale il profilo interno è rappresentato dalla Figura 2. In questa vasca l'acqua è mantenuta sempre allo stesso livello AB, mediante la continua affluenza di fluido. La vasca è scompartita in tre camere per mezzo di due tavolati, come chiaramente ci mostra quel profilo. Un'apertura, fatta abbasso nel primo tavolato, dà la comunicazione tra la prima camera e la seconda; ed un'altra, fatta in alto nel secondo tavolato, dà passaggio all'acqua dalla seconda camera nella terza.

Lavorata in questo modo la vasca, l'acqua si mantiene quieta nella camera da cui debbe uscire. In fatti l'acqua cade nella prima camera, e pria che sia giunta all'ultima, ha intieramente perduto la sua agitazione: vi resta poi sempre al medesimo livello trabocccando dall'incavo *ab* fatto nell'orlo della vasca, l'acqua che sovrabbonda. La sezione orizzontale di questa vasca è ovale: lunga due

metri e larga 0,7 a un bell'incirca; ma non è disegnata in proporzione.

Nella parete anteriore della terza camera avvi verso il fondo un foro CD, cui è unito un cannone a conoide, il quale ha prossimamente la stessa figura che prende l'acqua nell'uscire da un foro circolare fatto in una sottile parete verticale, fino al luogo della così detta *vena ristretta*. A questo cannone è annestato un altro cannone cilindrico orizzontale CQR, che d'ora innanzi chiamerò *condotto*. Internamente, dinanzi a quell'apertura CD, è adattato uno sportello *rs* impernato in *r*, e movibile mediante il manubrio Ss. Questo sportello può chiudere esattamente l'apertura CD, e così impedire il passaggio dell'acqua dalla vasca nel condotto. Il diametro di questo condotto è un decimetro. L'altezza poi dell'acqua nella vasca dal centro del foro è metri 1,172, e la lunghezza del condotto è metri 11,615.

Questo condotto è di latta raddoppiata, diviso in tre pezzi guarniti alle loro estremità di viti di ottone, onde possano annestarsi l'uno all'altro, ed in questo modo il condotto si può ridurre alla lunghezza di metri 7,936, e, se si vuole, alla lunghezza di 4,218.

In vicinanza della vasca il condotto ha una chiavetta *u*, la quale, se si vuole, dà la comunicazione dal di dentro del condotto al di fuori: ne diremo l'uso a suo tempo.

L'ultima porzione del condotto per la lunghezza di metri 0,230 non è cilindrica, ma è di figura parallelepipeda rettangola, la cui sezione perpendicolare all'asse del condotto (che è nel tempo stesso asse di quest'ultima porzione) è il quadrato che circoscrivere si potrebbe al cerchio, sezione del condotto medesimo; di modo che se questo condotto fosse prolungato entro quel pezzo parallelepipedo, a lui sarebbe esattamente inscritto. A quest'ultima porzione del condotto, daremo il nome di *camera*.

§ 71. Questa camera è gettata di bronzo, ed ha le pareti grosse metri 0,006 onde resistere agli sforzi dell'acqua: a lei è saldato un pezzo di condotto lungo metri 0,15, parimente di bronzo di getto, e per mezzo di questo essa può con delle viti unirsi al condotto di

4

latta. La misura della lunghezza della camera e del pezzo del condotto di bronzo è compresa nelle misnre che ho dichiarato per l'intiero condotto.

Al di sopra della camera è collocata una campana di rame XX, la quale porta il cannello per cui l'acqua debbe salire, allorchè la macchina è in opera. L'interiore della camera è rappresentato in più gran proporzione dalle figure 3, 4 e 5, nelle quali i medesimi pezzi sono contrassegnati con le medesime lettere, di modo che, gettando gli occhi ora sulla figura 1, ora sulle figure 3, 4 e 5, potrà il mio lettore capire quanto io sono per soggiungere.

Nella faccia superiore della camera di bronzo è fortemente saldato un piatto parimente di bronzo, al quale con otto viti è fermato un altro piatto IK di legno di quercia, su cui appoggiar si debbe la campana. Tauto questo piatto, quanto quello di bronzo, e la faccia snperiore della camera hanno un'apertnra circolare *pp* che ha il centro comune con essi. In quest'apertura o foro circolare è incastrata e fermata con viti un'animella di bronzo *ef*, la quale si apre dal di dentro della camera al di fuori. Essa è tenuta in guida dall'asse *mn*, il quale passa per due occhi che trovansi nei due ritegni o staffe *qq*, *qq*. Quest'animella ha la figura di un cono troncato che va a nascondersi entro un'apertura *pp* della stessa figura precisamente, a tenuta di acqua. A quest'animella io do il nome di *animella della salita*, perchè essa si apre onde far salir l'acqua dalla camera nella campana.

Questa campana XX, cui ho data prossimamente la figura di una paraboloide è fortemente unita per mezzo di viti a quel piatto di legno IK. Il diametro della base della campana è di metri 0,29, e la di lei altezza di 0,384. Nella sommità vi è un pertugio circolare guernito di una vite femmina, nella quale si fa passare, e per mezzo di una vite maschia si ferma un cannello verticale NLO. Questo cannello dà la comunicazione dal di dentro al di fuori della campana. La lunghezza del cannello è diversa secondo le diverse altezze alle quali debbe spingersi l'acqua. Il diametro del cannello fuori della campana è metri 0,028, e quello della porzione entro di

essa, è 0,033: questa porzione, poi, è lunga 0,310. La sommità O del cannello sbocca in una secchia, la quale ha un beccuccio P, per cui esce l'acqua salita a quell'altezza medesima. Il cannello è di latta, e la campana è di rame, fortificata con fasciature egualmente di rame, e nel suo orlo, ove sono le viti che debbono unirla al disco di legno, è saldato un cerchio di ferro che esse traversano. Nelle pareti della campana nei punti x, y sono due chiavette, delle quali la y è per dare l'uscita all'acqua che si trova nella campana, e la x per dar l'uscita all'aria, come si vedrà a suo luogo.

Levata la campana, se si guarda a vista di uccello il piatto su cui essa si posa, ci è questo rappresentato dalla Figura 4. Ivi scorgonsi l'animella ef; le sei viti t, t ecc. con le quali essa è attaccata al piatto di bronzo; le otto viti V, V ecc. con cui il piatto di legno è unito allo stesso piatto di bronzo; ed in fine le sei viti v, v ecc. che uniscono la campana al disco di legno.

§ 72. Nella parte superiore della bocca EF, cioè in E, si trova impernata una porticciuola di lastra di bronzo, grossa come le pareti della camera, alla quale io do il nome di *animella della fermata*, perchè ferma lo sgorgo dell'acqua dal condotto. Questa si apre dal di fuori al di dentro, e nel chiudersi si appoggia ad un orlo o telajo che è saldato alla bocca della camera. Con quanta cura ho potuto ho presa la misura del ristringimento che quest'orlo cagiona alla bocca, ed io ho ritrovato che, mentre l'area di una sezione del condotto perpendicolare al suo asse è metri quadri 0,00785, quella della porzione della bocca restata aperta è 0,00672.

L'animella della fermata EF ha un manico d'acciajo EG, in cui scorre un pezzo H di latta, di figura rettangola al quale do il nome di *ventola*, e questa per mezzo di una vite si ferma a quel luogo del manico che si vuole. La Figura 3 rappresenta l'animella della *fermata* quasi chiusa nella positura FEGH. Quando poi quest'animella è intieramente aperta, essa si accosta alla faccia superiore interna della camera: il suo manico è orizzontale, e la ventola resta di fronte all'uscita dell'acqua, a tenore di quanto dichiara l'altra situazione F′E′H′G′ del manubrio.

Tenendo alzata l'animella della *fermata* l'acqua della vasca M può fluire dalla bocca del condotto, e tenendola abbassata l'acqua della vasca è obbligata ad uscire dal foro *p*, sollevando l'animella della salita che vi si trova. La Figura 5 mostra la bocca della camera quando l'animella della fermata è mezza alzata, se però si guardi di fronte. Nella parete destra della camera, alla sua faccia esterna, vi è attaccata con viti una molla, come ci mostra la Figura 1, la qual molla può farsi lavorare sopra l'asse in cui è impernata l'animella della fermata. Questo asse si vede distintamente disegnato nelle due Figure 4 e 5, e dalla lettera *h* indicato. La molla è collocata in modo, che, allorquando ella si mette in opera, fa forza per alzare l'animella della fermata.

§ 73. Premessa adunque la predetta breve descrizione della macchina, è da dichiararne le operazioni.

Riempiuta la vasca M di acqua, mentre l'animella della fermata EF è chiusa, l'acqua dalla vasca M passa nel condotto; da questo pel foro *p*, alzando l'animella della salita, va nella campana, ch'essa riempie, per esempio, sino in *cd*, e per l'interiore del cannello salendo, si ferma in L, livellandosi con l'acqua della vasca. Nello spazio superiore della campana *c*X*d* resta confinata l'aria che in essa ritrovasi, e che non ha potuto scappare dalla bocca N del cannello ON, mentre l'acqua incominciava a riempiere la campana. Quest'aria è tanta, che nel suo stato naturale occupa uno spazio di metri cubi 0,01501; così preparata la macchina, supponiamo che l'acqua sia mantenuta sempre allo stesso livello AB, mercè l'affluenza di nuovo fluido.

§ 74. Ora aprasi l'animella della fermata, e mentre essa aveva la positura FEHG, gli si dia quella F'E'H'G'. Principierà l'acqua a sgorgare dalla bocca EF, e dopo alcuni istanti il getto acquisterà un'amplitudine tale che perverrà ad urtare la ventola H'. Battendo l'acqua in quella ventola obbliga il manico di essa ad innalzarsi rotando attorno del punto E, per lo che comincia un poco a chiudersi l'animella EF, ed allora, l'acqua che urta per di dietro, finisce di serrarla, e così termina lo sgorgo dell'acqua dalla bocca

EF della camera. L'acqua allora impedita di uscire, solleva l'animella p, entra nella campana, ascende al di là del livello L, sino al punto, per esempio, L', dal quale non può discendere, perchè l'animella p chiudendosi, impedisce il ritorno dell'acqua nella camera del condotto. Tutto questo succede in brevissimo tempo, cioè, in tre o quattro mezzi secondi. L'animella della fermata, la quale col chiudersi aveva presa la situazione FEHG, non abbisogna di esser nuovamente aperta, ma, per dir così, spontaneamente si schiude, lascia sgorgare il fluido, fintanto che il getto torna a battere la ventola; serra di nuovo l'animella, e di nuovo l'acqua, impedita di sgorgare, entra nella campana, ascende nel cannello e si ferma, per esempio, nel punto L''. In questa guisa continua ad aprirsi da sè stessa l'animella una terza volta, una quarta, una quinta, e così di mano in mano, finchè non si voglia a bella posta interrompere il giuoco dell'Ariete.

§ 75. Io chiamo *colpo d' Ariete* l'intervallo di tempo tra due successivi chiudimenti dell'animella della fermata; e dopo alcuni di questi colpi incomincia una fontana perenne di acqua dal beccuccio P, la quale non cessa se non cessa il giuoco della macchina.

§ 76. È cosa meritevole di osservazione il vedere che ad ogni colpo in cui si chiude l'animella della fermata, il condotto ha una pulsazione come s'ei fosse un'arteria, e ad occhio si riconosce ch'ei si dilata e si ristrigne. Così pure nel momento in cui chiudesi la detta animella, tutta la macchina soffre una violentissima scossa che la spinge innanzi, e ad impedirne l'effetto è necessario fermare la vasca, e collegare tanto bene tra loro i pezzi del condotto, che non possano strapparsi.

§ 77. Ecco i risultamenti che io da molte sperienze ho dedotti.

Risultamento I. Fatto il cannello LO di una certa lunghezza, per esempio, 3 metri, se l'acqua in due colpi d'Ariete giungeva a sgorgare da P, non aveva già bisogno di quattro colpi o di sei ecc. per isgorgare da un'altezza doppia o tripla della prima, ma ci volevano, per esempio, 8 colpi a sgorgare dall'altezza doppia; 17 dalla tripla, e così via discorrendo.

§ 78. Corollario. Dunque, fintantochè l'acqua non è giunta a riempiere tutto il cannello LO, e sgorgare dal beccuccio P, in ogni colpo d'Ariete non sale nel cannello LO la medesima quantità d'acqua, ma una quantità sempre minore. Perciò la porzione LL' sarà maggiore di quella $L'L''$, e questa porzione maggiore di $L''L'''$ ecc., quando però esse siano quelle riempiute dall'acqua in quei colpi dell'Ariete che tra lor si succedono.

§ 79. Risultamento II. Quanto è più corto il cannello ascendente LO, ovvero, quanto è minore l'altezza cui vuolsi alzar l'acqua, tanto è più grande la quantità d'acqua che sgorga dal beccuccio P in un certo numero di colpi, poste però, nei due casi, eguali tutte le altre circostanze della macchina.

§ 80. Corollario. Dunque in un tempo misurato, per esempio, in un'ora, in un giorno ecc., tanto più acqua alzerà l'Ariete, quanto è minore l'altezza a cui essa debbe salire.

§ 81. Risultamento III. Se il condotto DQRF si faccia di diverse lunghezze, l'esperienza dichiara, che, a misura ch'esso è più lungo, cresce la durata di un colpo d'Ariete; e si vede chiaramente che il getto uscendo da EF, per giungere ad urtare nella ventola H, impiega tanto maggior tempo, quanto il condotto è più lungo; di modo che se, per esempio, si facevano 10 colpi d'Ariete in 20″ quando il condotto aveva la totale lunghezza di dodici metri circa, lo stesso numero di colpi si faceva in 14″, essendo il condotto di circa 8 metri, ed in 10″ quando il condotto era quattro metri all'incirca.

§ 82. Corollario. A causa per tanto di questa maggior durata dei colpi, in un tempo determinato, come di un'ora ecc., l'Ariete innalzerà una minor quantità d'acqua.

§ 83. Risultamento IV. Per un altro verso risulta dalle sperienze, che quanto maggior lunghezza si assegnava al nostro condotto, tanto maggiore era la quantità d'acqua che in un certo numero di colpi s'innalzava; di modo che se, per esempio, col condotto lungo 12 metri circa, s'innalzava in dieci colpi una certa quantità d'acqua a tre metri di altezza, se ne innalzava circa la

terza parte quando, poste tutte le altre cose eguali, il condotto era lungo 4 metri soltanto.

§ 84. Corollario I. Dunque coll' aumentare la lunghezza del condotto si ha uno scapito ed un guadagno nella quantità di acqua che innalza l' Ariete: lo scapito viene dal farsi i colpi più radi, ed il guadagno dall' innalzarsi più acqua in ciascuno di essi.

§. 85. Corollario II. Dunque, poste tutte le altre circostanze eguali, vi sarà una certa lunghezza di condotto, la quale produrrà il massimo effetto, cioè, tale che la quantità di acqua innalzata in un tempo determinato, come di un' ora ecc., sarà massima. Io non ho potuto fare tante esperienze che mi bastassero per determinare nella mia macchina questo massimo.

§ 86. Risultamento V. La ventola H, nella quale l' acqua che sbocca da EF urta ed obbliga l' animella della fermata a chiudersi, può, come abbiamo detto (§ 71), allontanarsi dalla bocca EF fermandosi a vite in quel punto del manico EG, che si voglia. Ora mentre essa allontanasi dalla bocca della camera, il getto giunge più tardi ad urtarla, per lo che l' animella della fermata più tardi si chiude; quindi più lenti anche sono i colpi dell' Ariete; ma per compenso ci mostrano le sperienze, che nello stesso numero di colpi sbocca anche dalla sommità del cannello ascendente una maggior quantità di acqua.

§ 87. Corollario I. Dunque alla quantità di acqua che ha da innalzarsi in un tempo determinato, come, per esempio, di un'ora, porta vantaggio l' allontanamento della ventola dalla bocca EF, perchè in ogni colpo maggior quantità di acqua si spinge dalla camera nella campana, quindi nel tubo ascendente; ma a quello stesso effetto porta scapito l' allontanamento della ventola, perchè rende i colpi dell' Ariete più radi; quindi minor numero di questi colpi succede nell' assegnato tempo di un' ora.

§ 88. Corollario II. Vi sarà dunque una tal positura della ventola, che renderà massimo questo effetto.

§ 89. Risultamento VI. Chiamandosi *acqua perduta* l' acqua che sgorga dalla bocca EF, quando è aperta l' animella della fermata,

l' esperienze ci mostrano che le quantità di acqua perduta sono tanto maggiori, quanto i colpi dell' Ariete sono più radi.

§ 90. Risultamento VII. Allorquando si lascia la vasca M senza rimettervi nuova acqua, per la qual cosa si abbassa successivamente il livello del fluido, i colpi dell'Ariete divengono sempre più radi a misura che si fa quell' abbassamento; e lo sgorgo dal beccuccio P va continuamente diminuendo, finchè poi, prima di cessare affatto, diviene intermittente.

§ 91. Questi sono i principali risultamenti che le sperienze sull'Ariete presentano, e che facilmente possono da chicchessia verificarsi con qualunque macchina. Altri risultamenti ed altre osservazioni vi sono assai più delicate, delle quali non fo parola, riserbandomi a citarle allorquando, esposta la Teorica geometrica di questa macchina, saremo in situazione di ragionarvi sopra con maggior precisione.

§ 92. Si può anco fare in modo che la macchina giuochi senza lasciare aria nella campana; allora però la fontana è intermittente, e ad ogni colpo d'Ariete esce dall'alto della canna LO una mole di acqua. In questo caso la campana è scossa con violenza grande e potrebbe spezzarsi; ma se la campana resiste e continua la macchina a lavorare, ritorna l'aria, per dir così, da sè stessa in campana, e dopo qualche tempo si trova al solito ripieno di aria lo spazio cXd, e la fontana torna perenne e continua.

§ 93. Oltre il descritto meccanismo per fare aprire e chiudere l' animella della fermata, due altri ne ho immaginati. Nel primo, un peso tende ad aprire l' animella della fermata, e serve a mantenerla aperta. Questo peso aggrava il manico EG dell' animella; nel secondo, una molla la, unita con viti sull' esterno di una delle laterali pareti della camera, opera sull' asse che passa per E, e nel quale è impernata l' animella mentovata. Nella faccia poi interna della stessa animella, in quella faccia, cioè, che guarda internamente il di sopra della camera, è saldato un bottone, il quale fa sì che l' animella non si accosti alla parete superiore della camera medesima, ed in questa guisa dà all' acqua il campo di urtare dietro l' animella della fermata, ed in conseguenza di chiuderla.

§ 94. Quanto si è detto al § 86 vale anche pei due ingegni qui sopra descritti. Quello che ivi faceva l'allontanamento della ventola, è qui prodotto da un maggior momento che si dia al peso che ritiene aperta l'animella, o da una maggior tensione che si dia a quella molla, il cui uffizio è parimente quello di tenere aperta l'animella stessa.

§ 95. Ma non è necessario che una vasca somministri acqua all'Ariete. Io l'ho fatto giocare applicando in CD un imbuto, e ponendo l'imbuto, il condotto e la camera tutto sott'acqua in un canale di acqua corrente: conveniva aver cura che il canale fosse assai stretto, onde l'acqua fosse obbligata a correre entro il condotto, al che aveva attenzione di costringerla per mezzo di quell'imbuto. L'animella della fermata tutta restava sott'acqua, ed una volta messa in moto, continuava a giocare come se stata fosse nell'aria. In questa occasione però la detta animella aveva uno di quei due ingegni su mentovati.

CAPO VI.

RAGIONE DEL MODO D' OPERARE DELL' ARIETE.

§ 96. Dopo quanto abbiamo detto nei capi precedenti, non avvi alcuna difficoltà a dar la ragione dei fenomeni che presenta l'operare che fa l'Ariete. Esaminiamo quest'operare in un colpo d'Ariete, supponendo che pei colpi precedenti l'acqua siasi, nel cannello ascendente LO, già innalzata ad una certa altezza.

§ 97. In primo luogo vedo che allor quando si apre tutta in un subito l'animella della fermata, e l'acqua incomincia a sgorgare dalla bocca della camera, ne viene in questo caso il medesimo effetto dichiarato al § 1, e di cui si è data la ragione al § 21. Per ciò il getto che sbocca da EF, incomincia dall'aver l'amplitudine quasi nulla, a poco a poco l'aumenta, finchè giunge al punto di urtare nella ventola H per chiudere in seguito l'animella della fermata. A misura che cresce l'amplitudine del getto (§ 21), cresce

anche la velocità dell' acqua nel condotto, ed allorchè si chiude l' animella, l' urto che si fa dalla colonna di acqua rinchiusa nel condotto, si fa appunto con quella velocità.

§ 98. Non fa mestieri spiegare come l'animella della fermata per opera del getto si chiuda, chiaramente mostrandolo la positura stessa della ventola. Egualmente comprendesi come l'acqua chiuda la detta animella, quando è tenuta aperta o dallo sforzo di un peso, o da quello di una molla (§ 93).

§ 99. Impedito tutto in un tratto lo sgorgo dalla bocca EF, l' acqua rinchiusa fa per ogni dove uno sforzo (§ 11) sulle pareti interne della camera e del condotto, del quale sforzo abbiamo considerata la violenza al § 41, e quindi essa tenta di aprirsi un qualche passaggio. Il foro p, destinato a dare una comunicazione tra la camera dell' Ariete e la campana, presenta all' acqua un' uscita, ed aperta dall' urto dell' acqua l' animella della salita, l' acqua sbocca nella campana, come succede appunto nel caso contemplato al § 61. L' acqua della campana, come quella del vaso M' della Figura 6, contrasta l' entrata di quell' acqua della camera, la quale si spinge entro la campana medesima, e questo contrasto distrugge a poco a poco la velocità con la quale l' acqua sbocca dal foro p; e quando si è questa ridotta a nulla (o un poco prima, se l' animella della salita ha qualche peso nell' acqua), cessa il fluire dell' acqua entro la campana, e si chiude l' animella della salita, poichè da quell'istante l' acqua della campana comincerebbe a tornare entro la camera.

§ 100. Dopo questo colpo l' acqua si troverà nel cannello ascendente ad un più alto livello, di quanto comporta la quantità di fluido introdotto nella campana, e succedendo un secondo, un terzo colpo si continua il giuoco della macchina; come poi da sè medesima l' animella della fermata si riapra, or ora vedremo; intanto concludiamo.

§ 101. Corollario I. Da ciò che si è detto al § 61, applicato al nostro caso, risulta che quanto maggiore sarà l' altezza dell' acqua nel cannello ascendente LO, tanto minore sarà il tempo pel quale

continuerà l'acqua ad entrare nella campana, e tanta minor quantità ve ne entrerà; quindi tanta più acqua potremo innalzare con l'Ariete, quanto minore sarà l'altezza cui vorrà innalzarsi.

§ 102. Corollario II. Non vi è alcun limite al di là del quale non si possa innalzar l'acqua con qualunque dato Ariete. La verità di questo importantissimo risultamento si comprenderà, osservando che qualunque sia l'altezza dell'acqua nel vaso M′ (F. 6.), non potrà questa impedire che mentre si chiude la bocca EF del condotto, la colonna dell'acqua apra con la sua percossa l'animella H, ed entri, sebbene per brevissimo tempo, nel vaso M′, e, nel caso dell'Ariete, entri nella campana; giacchè, per quanto piccolo sia il momento della colonna acquea, e grandissima la resistenza che questa incontra a penetrare nella campana, ci vorrà sempre qualche tempo per estinguerlo. Questo però suppone che le pareti siano incapaci di rilassarsi, giacchè se non avessero questa qualità, avvenir potrebbe ch' esse nel dilatarsi offrissero all' acqua minor resistenza, di quella che l'altezza dell' acqua sull' animella presenta per impedirne l'alzamento, e così a poco a poco estinguessero tutta la percossa dell'acqua. Ma anche senza di questo potrebbe avvenire che l'acqua entrata nella campana fosse tanto poca che tornasse indietro mentre l'animella ricade.

§ 103. Corollario III. Allorquando incomincia a giocare l'Ariete, e che riempiesi il cannello ascendente, le quantità dell'acqua che ad ogni colpo sale nel cannello, vanno decrescendo, fintanto che non comincia la fontana dal beccuccio P.

§ 104. Corollario IV. A circostanze eguali, quanto maggiore sarà la velocità con la quale l'acqua passa dalla camera nella campana, mentre chiudesi l'animella della fermata ed apresi quella della salita, tanto più tempo continuerà l'acqua ad entrare nella campana, tanto maggiore sarà la quantità di acqua entrata in ciascun colpo, e più abbondante sarà la fontana dall'alto della canna.

§ 105. Corollario V. La quantità di acqua ch' entra nella campana, dipende dalla grandezza dell'apertura o foro p, dalla velocità con cui comincia ad entrarvi, e dal tempo che continua il suo

fluire; dunque se in un altro Ariete, in tutto conforme al primo, il foro p fosse minore, l' acqua allora sboccherebbe nella campana con maggior velocità, e vi continuerebbe a sboccare per maggior tempo (§ 67), e per queste due ragioni vi entrerebbe maggior quantità di acqua; ma per un altro motivo questa scemerebbe; cioè, per esser diminuita l' area del foro p; pel che concluderemo che vi sarà una tale apertura p, con la quale l' Ariete produrrà il massimo effetto.

§ 106. Continuiamo a considerare l' operare dell' Ariete.

Dopo il primo colpo il quale si ottiene aprendo l'animella della fermata con la mano, l'Ariete continua sempre a giocare aprendosi la detta animella da sè medesima. Per comprendere come questo succeda, è da rileggere quanto abbiamo detto al § 47. Si vedrà allora che è questo un effetto dell'aria esterna la quale, facendo una forza di pressione sopra l' animella dal di fuori al di dentro, mentre la pressione dell' acqua interna diminuisce, obbliga l' animella ad aprirsi; anzi in questo aprimento si osserva che l' aria esterna s' introduce nel condotto, dal quale viene scacciata allorchè novamente incomincia il getto. È vero che essendo il manico EG dell'animella della fermata, mentre essa è chiusa, inclinato davanti, come mostra all' occhio il disegno della macchina, il di lui peso ed il peso della ventola tendono ad aprire l'animella, ma senza l'opera dell' aria non sarebbero sufficienti a farlo, come di fatto non lo sono quando l'Ariete non giuoca, e quando l'acqua si appoggia internamente all' animella: lo stesso si dica per l' aprirsi dell' animella con i due mentovati ingegni (§ 93).

§ 107. Aperta l' animella della fermata, l' acqua comincia a moversi nel condotto, e quando essa è divenuta tanto veloce che nell' uscire da EF può incontrare la ventola, si chiude allora l' animella di fermata: ora se il getto non sarà invariabile, è manifesto che, allontanando un poco più dallo sbocco la ventola, l'acqua non la potrà urtare nell' istante in cui l' urtava prima, ma per poter giungere a fare urto sopra di lei, per quindi chiudere l'animella, dovrà il getto aumentar d' amplitudine: l' acqua allora correrà più

velocemente nel condotto, o si troverà dotata di maggior velocità nell' atto che si chiuderà l' animella, e più tardi di prima si farà questo chiudimento.

§ 108. Corollario I. Dunque supponendo che il punto G sia il limite della distanza alla quale si può situare la ventola, cioè sia quel punto oltre il quale se si portasse la ventola, anco il getto dotato della sua massima amplitudine non urterebbe su di lei, ne viene che se collocheremo la ventola al di qua di questo punto, cioè verso EF, l'animella della fermata nel chiudersi arresterà il getto quando esso è dotato di un grado o di un altro di celerità; e quanto più la ventola sarà prossima ad EF, tanto minor velocità avrà il getto allorchè l' animella si chiude.

§ 109. Corollario II. Dunque quanto più vicina si pone la ventola alla bocca EF, tanto minore sarà ancora la celerità con la quale l' acqua dalla camera entrerà nella campana; giacchè questa velocità ha sempre lo stesso rapporto con la celerità dell' acqua che sgorga dalla bocca EF all' atto del chiudimento dell' animella; dunque anche tanta minor copia d' acqua entrerà in ogni colpo nella campana; quindi minore sarà l' acqua innalzata in un certo numero di colpi.

§ 110. Perchè poi quanto più si slontana la ventola dalla bocca EF, tanto più lenti riescano i colpi dell' Ariete, e tanto maggiore la mole dell' acqua che si perde dalla bocca EF, è facile a comprendersi, essendo per sè manifestissimo. In fatti se in uno sperimento si pone quella ventola più distante che in un altro, allora il getto ha bisogno di maggior tempo onde acquistare quella velocità che a lei dia un' amplitudine capace ad urtare nella ventola e chiuder l' animella; ed in questo maggior tempo si perde maggior quantità d' acqua.

§ 111. Quando all' animella della fermata non sia applicata la ventola, ma siavi adattato un peso al manico EG, ovvero una molla, come è detto al § 93, allora l' animella si chiude per l' impulsione dell' acqua sulla faccia interna dell' animella stessa, e questo chiudimento segue quando l' acqua nella canna ha acquistata tanta

velocità che possa col suo momento superare il momento di quel peso, o la forza della molla; e per questo se la forza di quel peso o della molla non potesse esser superata e vinta che dall' urto del getto invariabile, il chiudimento dell'animella seguirebbe allora soltanto. Diminuendo poi la forza del peso, o nell'altro caso quella della molla, è manifesto che basterà una minor velocità nell'acqua per serrare l'animella, ed allora più breve sarà la durata di un colpo di Ariete; minor quantità d'acqua sboccherà nella campana, e minor quantità d'acqua si perderà, e tutto ciò appunto come avviene pel diminuito allontanamento della ventola.

Donde dipendano i due risultamenti dell' esperienza, annunziati ai §§ 81 e 83, che, cioè, tanto siano più lenti i colpi della macchina, e tanta maggior mole di acqua s' innalzi in un colpo, quanto maggiore è la lunghezza del condotto, facil sarà rilevarlo, quando ci rammentiamo ciò che fu detto ai §§ 29, 31 e 52.

§ 112. Al § 95 noi abbiamo detto che l' Ariete può giocare egualmente bene messo il condotto in un canale d'acqua corrente, ed indicato come in questo caso debba farsi. Ora facilmente comprendesi che la stessa cosa debb' essere o che l'acqua sia spinta nel condotto dalla pressione del fluido contenuto nella vasca, o che vi sia spinta dal pendio del canale nel quale s' immerge la macchina; bisogna soltanto considerare la circostanza che l'animella della fermata resta immersa nell' acqua; ma ciò non arreca alcun cangiamento al modo d'operar della macchina; l'animella della fermata è nella stessa guisa aperta dalla pressione dell' aria esterna; e questo sforzo si fa sopra la faccia esteriore dell' animella della fermata col mezzo dell' acqua, che resta quasi stagnante avanti di essa animella, quando si trova chiusa.

§ 113. È ora da dire dell' aria che è contenuta nella campana. Per bene comprendere l' effetto di essa, conviene distinguere due tempi nella durata di un colpo d' Ariete. Si apre l' animella della fermata, comincia a sboccare l' acqua, e dopo pochi istanti quell' animella si chiude. Dall' istante nel quale avviene questo chiudimento, comincia l'acqua ad entrare nella campana, e quando termina il

fluire di essa dalla camera nella campana medesima, si richiude l'animella della salita, diminuisce la pressione sopra quella della fermata, ed allora essa si apre; così la durata di un colpo è composta di due tempi: uno nel quale l'animella della fermata sta aperta; l'altro nel quale sta serrata: nel primo l'acqua sgorga dalla bocca EF, e va fuori della macchina, e questa è *l'acqua perduta*; nel secondo l'acqua passa dalla camera nella campana, e questa è quella che s'innalza, e chiamasi *acqua innalzata.*

§ 114. A due oggetti soddisfà l'aria contenuta nella campana: il primo all'economia della macchina si riferisce, e consiste nell'ammorzare ch'essa fa la violentissima forza di percossa con la quale l'acqua, allorchè entra nella campana, spinge l'animella della salita, ed il fluido che vi sta sopra. Mercè quell'aria l'urto dell'acqua s'indebolisce, come accadrebbe a quello di un colpo di martello, se cadesse sopra un guanciale di lana. In questa maniera le pareti della campana sono sfiancate assai meno; quindi minore è il pericolo che si spezzino.

§ 115. L'altro oggetto consiste nel rendere continua la fontana ch'esce dal beccuccio P, la quale senza dell'aria è intermittente. Per comprendere in che modo tutto questo succeda, si osservi che quando non vi fosse l'aria nella campana, allora in tutto quel tempo pel quale l'animella della fermata sta chiusa, l'acqua che dalla camera passa nella campana, sgorgherebbe nello stesso tempo dal beccuccio P, e terminando l'acqua d'entrare nella campana, terminerebbe anche di uscire acqua dal beccuccio. Quando poi nel secondo colpo cominciasse di nuovo il fluire dell'acqua nella campana, ricomparirebbe la fontana del beccuccio P; ed in questa guisa la fontana sarebbe intermittente.

§ 116. Allorchè l'aria riempie una porzione cXd della campana, l'acqua che vi è spinta dentro solleva il sovrapposto fluido, e comprime in questa guisa quell'aria, mentre nel tempo stesso obbliga una porzione di fluido a salire nel cannello NO; rimane poi occupato dall'acqua novamente entrata nella campana quello spazio che l'aria, ristringendosi, abbandonò. Cessato l'ingresso dell'acqua

nella campana, l'aria riprende a poco a poco il suo primiero stato, forzando la nuova acqua a salire nel cannello e sboccare dal beccuccio P. Tutto questo si fa in quel tempo in cui non entra acqua nella campana, in quel tempo, cioè, nel quale, se mancasse l'aria, il beccuccio P non butterebbe acqua.

§ 117. Sarà egli poi la medesima cosa, qualunque sia la mole dell' aria che si racchiude nella campana? Pel primo oggetto, quanto è maggiore la mole dell' aria, tanto è desso meglio adempito; ma riguardo al secondo conviene che l'aria sia tanta, che dopo la compressione da essa sofferta (mercè l' urto dell' acqua la quale, mentre l' animella di fermata sta chiusa, è spinta nella campana) possa riprendere il suo stato in un tempo non più corto di quello nel quale l' animella della fermata sta aperta. Se ciò non avvenisse, la fontana dal beccuccio P diverrebbe intermittente (*).

§ 118. Ed ecco esposta la Teorica fisica dell'Ariete idraulico. Da questa molto lume ricaveremo per la Teorica geometrica, ed a vicenda la Geometria ci farà meglio comprendere tutte le cose dette fin ora, le quali acquisteranno una precisione ed esattezza, che a noi non sarebbe stato possibile di compartir loro col solo ragionamento e senza l' aiuto di questa scienza.

FINE DELLA PRIMA PARTE.

(*) Si veda l'Appendice alla fine del Trattato.

PARTE SECONDA.

TEORICA GEOMETRICA DELL' ARIETE IDRAULICO.

CAPO PRIMO.

SOLUZIONE DEI PROBLEMI CHE APPARTENGONO AL PRIMO FENOMENO.

§ 119. **Problema I.** *Annestata una canna orizzontale* CDEF *al vaso* M, *nel quale l' acqua è mantenuta allo stesso livello, e chiusa la bocca* EF *di questa canna onde non isgorghi acqua, se in un tratto sturasi la bocca stessa* EF, *l' acqua incomincerà di nuovo a sgorgare e correre nella canna: ora cercansi le relazioni tra gli elementi del moto che l' acqua ha correndo nella canna* CDEF, *prima che il getto abbia acquistata la massima ampiezza, sia, cioè, divenuto invariabile.*

Soluzione. Io osservo primieramente che sarà conosciuta la natura del moto dell' acqua nella canna, quando si conoscerà quella del moto dell' acqua in una sezione qualunque ZZ della canna stessa.

a' sia l' area della sezione ZZ;

λ la sua lunghezza;

D la gravità specifica dell' acqua;

t il tempo corso dopo l' istante in cui comincia il movimento;

s lo spazio in quel movimento;

h un' altezza conosciuta descritta da un corpo grave liberamente cadente;

θ un tempo parimente conosciuto impiegato a descriverla;

$\frac{2h}{\theta}$ sarà allora la velocità acquistata alla fine di questa caduta;

V sia l' altezza dovuta alla velocità con la quale l' acqua sgorgherebbe dal foro CD, se non ci fosse quella lunga canna;

v l' altezza dovuta alla velocità con la quale l' acqua corre nella canna, o passa dalla sezione ZZ alla fine del tempo t;

$\frac{2\sqrt{hV}}{\theta}$ sarà la velocità dell' altezza V (*), con la quale l'acqua sgorgherebbe dal foro CD se non ci fosse la canna;

$\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$ sarà la velocità con la quale l' acqua traversa la sezione ZZ alla fine del tempo t.

Ciò premesso, io rifletto che se non ci fosse la canna, il getto avrebbe la velocità $\frac{2\sqrt{hV}}{\theta}$. Ora questo incontra la colonna fluida contenuta nella canna medesima, e fa sopra di essa un urto per ispingerla avanti. Alla fine del tempo t, quella colonna fluida avendo già la velocità $\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$, l' acqua sgorgante dalla vasca urterà questa colonna con una velocità relativa $\frac{2\sqrt{hV}}{\theta} - \frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$; dunque la forza motrice, la quale, alla fine del tempo t, spinge innanzi quella colonna fluida contenuta nella canna, sarà eguale a $Da' \cdot \frac{4h}{\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2$, ovvero $Da' \cdot \frac{2\sqrt{h}}{\theta}(\sqrt{V}-\sqrt{v})$, secondo che l' urto si fa proporzionale ai quadrati delle velocità, od alle velocità semplici.

Noi, seguendo l' ipotesi più ricevuta, adotteremo la prima di quelle due misure dell' urto moltiplicata per un coefficiente indeterminato ε.

Se ora questa forza motrice si divide per la massa della colonna fluida che debbe spingersi innanzi, la qual massa è $Da'\lambda$, avremo l' espressione $\frac{Da' \cdot 4h(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2 \cdot \varepsilon}{\theta^2 \cdot Da'\lambda}$ che si riduce a $\frac{4h}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2 \cdot \varepsilon$, con la quale potremo rappresentare la forza acceleratrice che opera sopra ciascun punto della massa fluida in moto alla fine del tempo t.

(*) Per *altezza dovuta ad una velocità* o semplicemente *altezza di una velocità* intenderò sempre quell' altezza dalla quale cader dovrebbe un corpo grave per acquistar quella velocità medesima; egualmente *velocità dovuta ad una certa altezza*, o *di un' altezza* significherà la velocità che acquisterebbe un corpo grave liberamente cadendo da quell' altezza medesima.

§ 120. Ma oltre questa forza acceleratrice avvene una ritardatrice. Essa è la resistenza, come suol dirsi, *d' attrito* che l' acqua incontra a correre nella canna; consideriamo questa resistenza che soffre ciascun atomo di fluido, algebraicamente rappresentata da una formola composta di tre termini, dei quali uno sia proporzionale al quadrato, un altro alla prima potestà della celerità con la quale l' acqua corre nella canna, ed un altro da essa celerità indipendente; sia questa formola $\frac{4h}{\theta^2} mv + \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} + g$ nella quale m, n, g significano coefficienti costanti che debbono esser dati dalle sperienze.

Sarà dunque la total forza acceleratrice di quel movimento $\frac{4h}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2\varpi - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} - g$, la quale eguagliata a $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, ci darà l' equazione differenziale tra lo spazio ed il tempo.

Quest' equazione è dunque

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{4h}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2\varpi - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} - g;$$

ora se nel secondo membro di essa poniamo $\frac{\theta}{2\sqrt{h}}\left(\frac{ds}{dt}\right)$ in vece di $\sqrt{v}$, non vi s' incontreranno allora altre variabili che lo spazio ed il tempo,

§ 121. Ma senza che noi ci fermiamo a cercare la relazione tra lo spazio ed il tempo, indaghiamo quella tra la velocità ed il tempo, che ci farà più vantaggio. Sia v' la velocità alla fine del tempo t, cioè quella dovuta all' altezza v. C' insegna la Meccanica che in qualunque movimento sempre è $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv'}{dt}\right)$; ma $v' = \frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v}$, dunque $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{2\sqrt{h}}{\theta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{\sqrt{h}}{\theta} \times \frac{1}{\sqrt{v}}\left(\frac{dv}{dt}\right)$; avremo pertanto tra v e t quest' equazione

$$(1) \;\ldots\; dt\left\{\frac{4h.\varpi}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2 - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} - g\right\} = \frac{\sqrt{h}}{\theta} \times \frac{dv}{\sqrt{v}},$$

dall' integrazione della quale dipenderà la soluzione del problema.

A siffatta equazione si può dare la semplicissima forma $dt = \frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}}$, nella quale è

$a = \frac{4\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta}V - \frac{\theta g}{\sqrt{h}}$, $\qquad b = -\frac{8\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta}\sqrt{V} - 2n$,

$c = \frac{4\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta} - \frac{4\sqrt{h}}{\theta}m$; avremo per tanto

$$t = \int \frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}}.$$

§ 122. Ad ottener l'integrale di questa formola, facciamo $\sqrt{v} = x$, e si avrà $t = 2\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$.

Poniamo $x = y - \frac{b}{2c}$ sarà $dx = dy$, $a+bx+cx^2 = a - \frac{b^2}{4c} + cy^2$, quindi $t = 2\int \frac{dy}{a - \frac{b^2}{4c} + cy^2}$, o $t = \frac{2}{c}\int \frac{dy}{y^2 - \frac{b^2-4ac}{4c^2}}$ Facciamo

$\frac{b^2-4ac}{4c^2} = \alpha^2$, e si avrà $t = \frac{2}{c}\int \frac{dy}{(y+\alpha)(y-\alpha)} = \frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{y-\alpha}{y+\alpha} + C$.

Rimettiamo invece di y, il di lui valore espresso per $\sqrt{v}$, e troveremo

$$t = \frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{\sqrt{v} + \frac{b}{2c} - \alpha}{\sqrt{v} + \frac{b}{2c} + \alpha} + C = \frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{2c\sqrt{v}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{v}+b+2c\alpha} + C.$$

È da determinare la costante arbitraria: ora assegnamone il valore con la condizione che $t = 0$ dia $v = 0$, ed avremo

$C = -\frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{b-2c\alpha}{b+2c\alpha}$, quindi

(2). . . . $t = \frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(b-2c\alpha)}$; e questo è il valore del tempo dato per l'altezza dovuta alla velocità che ha l'acqua nella canna alla fine di questo tempo.

§ 123. Corollario I. Dall' equazione (2) si può ricavare $\sqrt{v}$ espresso per t, e si trova

$$\sqrt{v}=\frac{(b^2-4c^2\alpha^2)(e^{c\alpha t}-1)}{2c(b+2c\alpha)-2c(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}; \quad \text{ma } b^2-4c^2\alpha^2=4ac\text{, dunque}$$

$$(3)\ \ldots\ \sqrt{v}=\frac{2a(e^{c\alpha t}-1)}{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}},$$ essendo e il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità. Questa formola (3) ci dà l' altezza della velocità, conosciuto che sia il tempo.

§ 124. Scolio. Per avere il tempo che metterà il getto a divenire invariabile basterà nella formola (2) sostituire, in vece di v, l' altezza dovuta alla velocità del getto invariabile, ed allora avremo il valore di questo tempo.

Onde poi sapere qual sia quest' altezza, osservo che nell' istante nel quale il getto ha acquistata la massima ampiezza, la forza acceleratrice è diventata nulla; ed in conseguenza (§ 120) sarà

$$(4)\ \ldots\ \frac{4h\kappa}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-\frac{4h}{\theta^2}mv-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}n\sqrt{v}-g=0;$$

da questa equazione, dunque, ricavar debbesi il valore di $\sqrt{v}$.

Sia questo valore $\sqrt{H}$, e sarà H l' altezza dovuta alla velocità del getto, mentre ha acquistata la sua massima ampiezza; questa stessa velocità sarà dunque $\frac{2\sqrt{hH}}{\theta}$, ed il tempo impiegato dal getto ad acquistarla, sarà

$$(5)\ \ldots\ t=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)(b-2c\alpha)}.$$

§ 125. Corollario II. Il valore di t, che ci dà la formola (2), può anco svilupparsi in serie. A tal fine io osservo che quel valore si riduce così:

$$t=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{2c(b+2c\alpha)\sqrt{v}+4ac}{2c(b-2c\alpha)\sqrt{v}+4ac}=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{\frac{b+2c\alpha}{2a}\sqrt{v}+1}{\frac{b-2c\alpha}{2a}\sqrt{v}+1}\text{, quindi}$$

$t=\frac{1}{c\alpha}\left\{\cdot log\left(1+\frac{b+2c\alpha}{2a}\sqrt{v}\right)-\cdot log\left(1+\frac{b-2c\alpha}{2a}\sqrt{v}\right)\right\}$; ora si sa che $log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$ ecc., dunque facendo $\frac{b+2c\alpha}{2a}=A$, $\frac{b-2c\alpha}{2a}=B$, avremo

$$t=\frac{1}{c\alpha}\left\{A\sqrt{v}-\frac{A^2(\sqrt{v})^2}{2}+\frac{A^3(\sqrt{v})^3}{3}-\frac{A^4(\sqrt{v})^4}{4}+\text{ecc.}\right.$$
$$\left.-B\sqrt{v}+\frac{B^2(\sqrt{v})^2}{2}-\frac{B^3(\sqrt{v})^3}{3}+\frac{B^4(\sqrt{v})^4}{4}-\text{ecc.}\right\},\text{ ovvero}$$

$$(6)\ \ldots\ t=\frac{1}{c\alpha}\left\{(A-B)\sqrt{v}-\frac{A^2-B^2}{2}(\sqrt{v})^2+\frac{A^3-B^3}{3}(\sqrt{v})^3-\text{ecc.}\right\};$$

Operando nel modo stesso pel valore di t, datoci dalla formola (5), si avrà

$$(7)\ \ldots\ t=\frac{1}{c\alpha}\left\{(A-B)\sqrt{H}-\frac{A^2-B^2}{2}(\sqrt{H})^2+\frac{A^3-B^3}{3}(\sqrt{H})^3-\text{ecc.}\right\}.$$

Per calcolarne i coefficienti osservo che, essendo

$$\frac{(p+q)^m-(p-q)^m}{m}=2\left\{p^{m-1}q+\frac{(m-1)(m-2)}{2\cdot3}p^{m-3}q^3+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}p^{m-5}q^5+\text{ec.}\right\},$$

e sostituendo in A e B i rispettivi valori, si avrà

$$A-B=2\cdot\frac{2c\alpha}{2a};\qquad \frac{A^2-B^2}{2}=2\cdot\frac{b\cdot2c\alpha}{2^2a^2};$$

$$\frac{A^3-B^3}{3}=2\left\{\frac{b^2\cdot2c\alpha}{2^3a^3}+\frac{2\cdot1}{2.3}\times\frac{2^3c^3\alpha^3}{2^3a^3}\right\};$$

$$\frac{A^4-B^4}{4}=2\left\{\frac{b^3\cdot2c\alpha}{2^4a^4}+\frac{3\cdot2}{2\cdot3}\times\frac{b\cdot2^3c^3\alpha^3}{2^4a^4}\right\};$$

$$\frac{A^5-B^5}{5}=2\left\{\frac{b^4\cdot2c\alpha}{2^3a^5}+\frac{4.3}{2.3}\times\frac{b^2\cdot2^3c^3\alpha^3}{2^5a^5}+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\times\frac{2^5c^5\alpha^5}{2^5a^5}\right\}\text{ ec., e di poi}$$

$$\frac{A-B}{c\alpha}=\frac{2}{a};\qquad \frac{A^2-B^2}{2c\alpha}=\frac{b}{a^2};\qquad \frac{A^3-B^3}{3c\alpha}=\frac{b^2}{2a^3}+\frac{2c^2\alpha^2}{3a^3};$$

$$\frac{A^4-B^4}{4\alpha}=\frac{b^3}{4a^4}+\frac{b.c^2\alpha^2}{a^4};\qquad \frac{A^5-B^5}{5c\alpha}=\frac{b^4}{2^3a^5}+\frac{b^2c^2\alpha^2}{a^5}+\frac{2c^4\alpha^4}{5a^5}\text{ ecc.};$$

Dunque il valore di t, che la formola (6) ci somministra, sarà

$$(8) \ldots\ldots t = \frac{2}{a} \sqrt{v} - \frac{b}{a^2} (\sqrt{v})^2 + \left\{ \frac{b^2}{2a^3} + \frac{2c^2\alpha^2}{3a^3} \right\} (\sqrt{v})^3 -$$

$$\left\{ \frac{b^3}{4a^4} + \frac{bc^2\alpha^2}{a^4} \right\} (\sqrt{v})^4 + \text{ecc.},$$ e posta $\sqrt{H}$ in vece di $\sqrt{v}$, si avrà il valore di t della formola (7).

§ 126. Il valore di $\sqrt{v}$ datoci dalla formola (3) potrebbe anche essere sviluppato in una serie ordinata con le potenze del tempo t; come pure con l'ajuto del metodo inverso delle serie, potremmo dal ritrovato valore di t ottenere quello di $\sqrt{v}$; ma non ci fermeremo su di questo, e lo faremo se mai ci verrà bisogno.

§ 127. Problema II. *Poste tutte le cose come nel problema precedente, trovare l'espressione della quantità di acqua che sbocca dalla canna nel tempo t, contandolo dall'istante in cui incomincia il getto, ed un istante qualunque prima che il getto divenga invariabile.*

Soluzione.

Q sia la ricercata quantità di acqua;

a' l'area della sezione dello sbocco EF;

v' la velocità con la quale l'acqua sbocca alla fine del tempo t;

sarà $Q = \int a'v'dt$: ma $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v} = v'$ dunque

$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta} \int \sqrt{v} \cdot dt + C$; ora (123) $\sqrt{v} = \frac{2\alpha(e^{c\alpha t} - 1)}{b + 2c\alpha - (b - 2c\alpha)e^{c\alpha t}}$ dunque

$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta} 2\alpha \int \frac{e^{c\alpha t} - 1}{b + 2c\alpha - (b - 2c\alpha)e^{c\alpha t}} dt + C$; una parte di questa formola è integrabile, e si ha

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta} 2\alpha \left\{ -\frac{1}{c\alpha(b - 2c\alpha)} \cdot \log\left(b + 2c\alpha - (b - 2c\alpha)e^{c\alpha t}\right) - \int \frac{dt}{b + 2c\alpha - (b - 2c\alpha)e^{c\alpha t}} + C \right\}.$$

Per integrare l'altra parte facciamo $b + 2c\alpha - (b - 2c\alpha)e^{c\alpha t} = z$, ed avremo $e^{c\alpha t} = \frac{b + 2c\alpha - z}{b - 2c\alpha}$; $c\alpha t = \log(b + 2c\alpha - z) - \log(b - 2c\alpha)$;

$dt = -\frac{dz}{c\alpha(b + 2c\alpha - z)}$; quindi

$$-\int\frac{dt}{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}=\int\frac{dz}{c\alpha(b+2c\alpha-z)z}$$: ma

$$\frac{1}{z(b+2c\alpha-z)}=\frac{1}{b+2c\alpha}\left\{\frac{1}{z}+\frac{1}{b+2c\alpha-z}\right\}$$, dunque

$$\int\frac{dz}{c\alpha(b+2c\alpha-z)z}=\frac{1}{c\alpha(b+2c\alpha)}\int\left\{\frac{dz}{z}+\frac{dz}{b+2c\alpha-z}\right\};$$

$$\int\frac{dz}{c\alpha(b+2c\alpha-z)z}=\frac{1}{c\alpha(b+2c\alpha)}\cdot log\frac{z}{b+2c\alpha-z}$$; avremo per tanto

$$-\int\frac{dt}{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}=\frac{1}{c\alpha(b+2c\alpha)}\cdot log\frac{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}{(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}$$; e quindi

$$Q=\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\cdot 2a\left\{-\frac{1}{c\alpha(b-2c\alpha)}\cdot log\left(b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{c\alpha(b+2c\alpha)}\cdot log\frac{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}{(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}+C\right\}$$; C debbe determinarsi per modo che $t=o$ dia $Q=o$; avremo allora

$$C=\frac{1}{c\alpha(b-2c\alpha)}\cdot log\,4c\alpha-\frac{1}{c\alpha(b+2c\alpha)}\cdot log\frac{4c\alpha}{b-2c\alpha}$$, ed in conseguenza

$$(9)\ldots\ Q=\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\cdot 2a\left\{\frac{1}{c\alpha(b-2c\alpha)}\cdot log\frac{4c\alpha}{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{c\alpha(b+2c\alpha)}\cdot log\frac{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}{4c\alpha\cdot e^{c\alpha t}}\right\}.$$

§ 128. Corollario I. Per avere la quantità di acqua che sgorga dalla bocca EF dall' istante nel quale comincia il getto, sino a quello nel quale il getto diviene invariabile, basterà nella formola (9) sostituire a t il suo valore datoci dalla formola (5).

§ 129. Scolio. Nella formola $Q=\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\sqrt{v}\cdot dt$ abbiamo sostituito il valore di $\sqrt{v}$ dato per mezzo di t; ma avremmo potuto anche sostituire il valore di t dato per mezzo di v, operando così: si ha dal § 122

$$t=\frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(b-2c\alpha)}$$, quindi

$$dt = \frac{1}{c\alpha}\left\{\frac{1}{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}} - \frac{1}{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}\right\}\frac{cdv}{\sqrt{v}};$$

e sostituendo questo valore di dt nel valore di Q, sarà

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta\alpha}\int\left\{\frac{dv}{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}} - \frac{dv}{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}\right\}.$$

Facciamo $v = x^2$, ed allora

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta\alpha}\int\left\{\frac{2xdx}{b-2c\alpha+2cx} - \frac{2xdx}{b+2c\alpha+2cx}\right\};\text{ Ma}$$

$$\frac{2x}{b-2c\alpha+2cx} = \frac{2}{2c}\left(1-\frac{b-2c\alpha}{b-2c\alpha+2cx}\right);\quad \frac{2x}{b+2c\alpha+2cx} = \frac{2}{2c}\left(1-\frac{b+2c\alpha}{b+2c\alpha+2cx}\right),$$

dunque si avrà

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c}\int\left\{\frac{b+2c\alpha}{b+2c\alpha+2cx} - \frac{b-2c\alpha}{b-2c\alpha+2cx}\right\}dx;\text{ ed integrando}$$

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c}\left\{\frac{b+2c\alpha}{2c}\cdot\log(b+2c\alpha+2cx) - \frac{b-2c\alpha}{2c}\cdot\log(b-2c\alpha+2cx)\right\}+C.$$

In quest'ultimo valore di Q rimettiamo $\sqrt{v}$ in vece di x, e troveremo

$$Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot\log(b+2c\alpha+2c\sqrt{v}) - (b-2c\alpha)\cdot\log(b-2c\alpha+2c\sqrt{v})\right\}+C.$$

Per aver C osservo che $v = o$ dar debbe $Q = o$; e ne ricavo

$$C = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b-2c\alpha)\cdot\log(b-2c\alpha) - (b+2c\alpha)\cdot\log(b+2c\alpha)\right\};\text{ e per ciò}$$

$$(10)\ldots Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot\log\frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b+2c\alpha} - (b-2c\alpha)\cdot\log\frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b-2c\alpha}\right\}.$$

§ 130. Corollario II. Ad aver poi la quantità di acqua di cui si parla al § 128, converrà sostituire in questa formola (10) il valore di v, che si ricava dalla risoluzione dell' equazione (4) del § 124. Indicammo questo valore per H, e per ciò avremo

$$(11)\ldots Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot\log\frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{H}}{b+2c\alpha} - (b-2c\alpha)\cdot\log\frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{H}}{b-2c\alpha}\right\},$$

che sarà la quantità di acqua che sgorga dalla canna dall' istante nel quale comincia il getto, sino a quello in cui diviene invariabile.

§ 131. COROLLARIO III. Prendiamo il valore di t sviluppato in serie al § 125, e rappresentando per A', A'', A''' ecc., i coefficienti di questa serie, si avrà

$t = A'\sqrt{v} + A''v + A'''v^{\frac{3}{2}} + A''''v^2 + A^{v}v^{\frac{5}{2}} +$ ecc., quindi

$dt = A'\frac{dv}{2\sqrt{v}} + A''dv + \frac{3}{2}A'''\sqrt{v} \times dv + 2A''''vdv + \frac{5}{2}A^{v}v^{\frac{3}{2}}dv +$ ecc. Sostituendo ora questo valore di dt nella formola $Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\sqrt{v}\cdot dt$, si avrà

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\left\{\tfrac{1}{2}A'dv + A''\sqrt{v}\cdot dv + \tfrac{3}{2}A'''vdv + 2A''''v^{\frac{3}{2}}dv + \tfrac{5}{2}A^{v}v^{2}dv + \text{ecc.}\right\},$$

ed integrando

$$(12)\,..\,Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\left\{\tfrac{1}{2}A'v + \tfrac{2}{3}A''v^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}A'''v^{2} + \frac{2\cdot 2}{5}A''''v^{\frac{5}{2}} + \tfrac{5}{6}A^{v}v^{3} + \text{ec.}\right\}:$$

Non aggiungo costante, perchè nel determinarla troverei che debbe essere nulla. Questa formola (12) ci dà il valore di Q espresso in serie; se poi sostituiamo H a v, la stessa formola (12) ci somministrerà il valore della quantità di acqua che sgorga prima che il getto sia divenuto invariabile.

§. 132. PROBLEMA III. *Nelle stesse supposizioni fatte pel Problema primo, se la bocca della canna fosse per una parte* IF (F. 2.) *chiusa, e per una porzione* IE *aperta, e da quest' apertura* IE *l' acqua già sgorgasse con getto invariabile, e se ad un tratto si aprisse intieramente la bocca, onde l' acqua potesse sgorgare, come nel caso contemplato al Problema primo, si dimanda la relazione tra il tempo e la velocità del moto che prenderebbe l' acqua nella canna, prima che il getto dall' intiera bocca* EF *divenisse invariabile.*

SOLUZIONE.

$\frac{2\sqrt{h}V}{\theta}$ sia, come al § 1, la velocità con la quale l' acqua sgorgherebbe se la canna non ci fosse;

$\frac{2\sqrt{h}V'}{\theta}$ la velocità con la quale l'acqua scorreva nella canna effettivamente, quando la bocca era per una parte chiusa e per una aperta;

$\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$ la velocità che ha l'acqua nella canna alla fine del tempo t, contando questo tempo dall'istante nel quale si toglie dalla bocca l'ostacolo IF il quale per una parte la chiudeva.

Il medesimo ragionamento che ho fatto al § 1 per trovare la forza acceleratrice pel problema I, è buono adesso, e ci conduce ad avere la stessa espressione di quella forza, cioè,

$\frac{4h}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2 s - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} - g$. Troveremo adunque, come

al § 122, $t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{2c\sqrt{v}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{v}+b+2c\alpha} + C.$

Tutta la differenza consisterà nella determinazione della costante. Ivi fu determinata per modo che, fatto $t =, o$ si avesse $v = o$, e quindi debb' esser tale il valore della costante che, quando sia $t = o$,

abbiasi $v = V'$; sarà dunque $C = -\frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{2c\sqrt{V'}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{V'}+b+2c\alpha}$, e quindi

$$(13) \; \ldots \; t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(2c\sqrt{V'}+b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(2c\sqrt{V'}+b-2c\alpha)}:$$

Quest'equazione ci fa conoscere il tempo, data che sia la velocità.

§ 133. Corollario I. Dalla formola (13), preso per cognito il tempo, si può trovare il valore di $\sqrt{v}$ dato per mezzo di t. Posto in fatti $2c\sqrt{V'} + b + 2c\alpha = M$; $2c\sqrt{V'} + b - 2c\alpha = M - 4c\alpha$,

si ha $e^{c\alpha t} = \frac{2cM\sqrt{v}+(b-2c\alpha)M}{2c(M-4c\alpha)\sqrt{v}+(b+2c\alpha)(M-4c\alpha)}$, quindi

$$(14) \; \ldots \sqrt{v} = \frac{(b+2c\alpha)(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}-(b-2c\alpha)M}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}$$

§ 134. Corollario II. Se poi vorremo il tempo necessario perchè il getto divenga invariabile, converrà sostituire nella formola (13), in vece di v il suo valore H; avremo allora

$$(15) \; \ldots \; t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)(2c\sqrt{V'}+b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)(2c\sqrt{V'}+b-2c\alpha)};$$

§ 135. **Problema IV.** *Poste tutte le cose, come nel Problema precedente, trovare l' espressione della quantità di acqua che sgorga dalla canna nel tempo* t.

Soluzione. Questo Problema si risolve nel medesimo modo del II, e si ha

$$Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot log(b+2c\alpha+2c\sqrt{v}) - (b-2c\alpha)\cdot log(b-2c\alpha+2c\sqrt{v})\right\}+C;$$

ma la costante debbe determinarsi per modo che, facendo $v = V'$ abbiasi $Q = o$. Con questa condizione si trova

$$C = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b-2c\alpha)\cdot log(b-2c\alpha+2c\sqrt{V'}) - (b+2c\alpha)\cdot log(b+2c\alpha+2c\sqrt{V'})\right\},$$

e perciò

$$(16)..Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot log\frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b+2c\alpha+2c\sqrt{V'}} - (b-2c\alpha)\cdot log\frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b-2c\alpha+2c\sqrt{V'}}\right\}.$$

§ 136. **Corollario I.** Per avere la quantità di acqua data pel tempo basterà nella formola $Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\sqrt{v}\cdot dt$, sostituire a $\sqrt{v}$ il suo valore, datoci dalla formola (14); si avrà allora

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\frac{(b+2c\alpha)(M-4c\alpha)e^{c\alpha t} - (b-2c\alpha)M}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}dt,$$

e questa formola si riduce a quest' altra

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\left\{-\frac{(b+2c\alpha)}{2c^2\alpha}\cdot log\left(2cM - 2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}\right) - (b-2c\alpha)M\int\frac{dt}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}\right\};$$

non resta ora altro da integrarsi che la quantità $\int\frac{dt}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}$: per questo facciasi $2cM - 2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t} = z$, ed avremo $e^{c\alpha t} = \frac{2cM-z}{2c(M-4c\alpha)}$, quindi $dt = -\frac{dz}{c\alpha(2cM-z)}$, e per ciò

$$\int\frac{dt}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}} = -\int\frac{dz}{c\alpha(2cM-z)z};$$

Ma $\frac{dz}{(2cM-z)z}=\frac{1}{2cM}\left\{\frac{1}{z}+\frac{1}{2cM-z}\right\}dz$,

dunque, sostituendo ed integrando

$$-\int\frac{dt}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}=\left\{\frac{1}{c\alpha}\cdot\log z-\frac{1}{c\alpha}\cdot\log(2cM-z)\right\}\frac{1}{2cM}+C;$$

ovvero

$$-\int\frac{dt}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}=\frac{1}{2c^2\alpha M}\cdot\log\frac{z}{2cM-z}+C;$$

Rimettiamo invece di z il suo valore, e sarà

$$-\int\frac{dt}{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}=\frac{1}{2c^2\alpha M}\cdot\log\frac{2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}{2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}+C$$

$$=\frac{1}{2c^2\alpha M}\cdot\log\frac{M-(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}{(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}+C.$$

Quindi $Q=\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\left\{-\frac{b+2c\alpha}{2c^2\alpha}\cdot\log\left(2cM-2c(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}\right)+\frac{b-2c\alpha}{2c^2\alpha}\cdot\log\frac{M-(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}{(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}\right\}+C.$

La C debbe determinarsi per modo che $t=o$ dia $Q=o$; dunque

$C=\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\left\{\frac{b+2c\alpha}{2c^2\alpha}\cdot\log(8c^2\alpha)-\frac{b-2c\alpha}{2c^2\alpha}\cdot\log\frac{4c\alpha}{M-4c\alpha}\right\}$; ed in fine

$$(17)\ldots Q=\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\left\{\frac{b+2c\alpha}{2c^2\alpha}\cdot\log\frac{4c\alpha}{M-(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}+\frac{b-2c\alpha}{2c^2\alpha}\cdot\log\frac{M-(M-4c\alpha)e^{c\alpha t}}{4c\alpha\cdot e^{c\alpha t}}\right\}.$$

Questo è il valore di Q dato pel tempo t.

§ 137. Corollario II. Se nella formola (16) sostituiamo a v l'altezza H, dovuta alla velocità del getto invariabile, avremo allora la quantità di acqua che sgorga, prima che il getto abbia acquistata la sua massima ampiezza; anche dalla formola (17) si ricaverebbe questa quantità di acqua, purchè vi si ponesse in vece di t, quel tempo che impiega il getto a divenire invariabile.

§ 138. PROBLEMA V. *La bocca* EF (F. 2) *della canna sia guarnita di un orlo o telajo che ne ristringa l' area; cercasi in questo caso la relazione tra il tempo e la velocità del moto che prende l' acqua nella canna, quando, come nel Problema I, ad un tratto si lascia sgorgare l' acqua per* EF.

SOLUZIONE. Questo problema differisce dal primo, perchè qui l' area della bocca EF è minore dell' area della sezione della canna. Da tal differenza nasce una forza ritardatrice che non s' incontrava nel caso del primo problema; imperciocchè quell' orlo o risalto che ristringe la bocca della canna, forma un impedimento, e rattiene l' uscita dell' acqua.

Esprimiamo questa porzione di forza ritardatrice, con una formola simile a quella con la quale si rappresentò la resistenza dell' acqua nella canna, e sia (*) questa formola

$$\frac{4h}{\theta^2} m' v + \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n' \sqrt{v} + g'.$$

Conserviamo le stesse lettere per significare quelle cose che in questo problema, come nel primo del § 119, debbono rappresentarsi algebraicamente; e di più $\beta : 1$ sia il rapporto dell' area della sezione della canna all'area ristretta della bocca EF: ciò premesso, è facil cosa il vedere che la ricercata relazione ci sarà somministrata dall' equazione

$$dt \left\{ \frac{4h \cdot \beta}{\lambda\theta^2} (\sqrt{V} - \sqrt{v})^2 - \frac{4h}{\theta^2} (m + m') v - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} (n + n') \sqrt{v} - (g + g') \right\} =$$

$\frac{\sqrt{h}}{\theta} \cdot \frac{dv}{\sqrt{v}}$, la quale è la stessa dell'equazione (1), in cui, in vece di m, n, g, si è posto $m + m'$, $n + n'$, $g + g'$.

Si avrà dunque nel modo medesimo

$$(18) \ldots\ldots t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(2c\sqrt{v} + b - 2c\alpha)(b + 2c\alpha)}{(2c\sqrt{v} + b + 2c\alpha)(b - 2c\alpha)};$$

$$(19) \ldots\ldots \sqrt{v} = \frac{2\alpha(e^{c\alpha t} - 1)}{b + 2c\alpha - (b - 2c\alpha) e^{c\alpha t}};$$

(*) Vedremo altrove perchè con una tal formola si rappresenti questa resistenza.

ed i valori di a, b, c saranno i seguenti

$$a = \frac{4\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta} V - \frac{\theta(g+g')}{\sqrt{h}},$$

$$b = -\frac{8\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta}\sqrt{V} - 2(n+n'),$$

$$c = \frac{4\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta} - \frac{4\sqrt{h}}{\theta}(m+m'), \text{ ed } \alpha^2 = \frac{b^2-4ac}{4c^2}.$$

§ 139. Corollario I. Trovato il valore di v, che è dovuto alla velocità dell' acqua in una sezione ZZ della canna, si può facilmente ottenere quello che è dovuto alla velocità dell' acqua nella bocca EF; infatti essendo $\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$ la velocità con la quale l' acqua corre nella canna, se chiamiamo x quella che in tale istante ha l'acqua nella bocca, sarà, secondo la nota legge idraulica del *Castelli*, $\beta : 1 :: x : \frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$, quindi $x = \frac{2\beta\sqrt{hv}}{\theta}$, ed in conseguenza

$$x = \frac{2\beta\sqrt{h}}{\theta} \cdot \frac{2\alpha(e^{c\alpha t}-1)}{b+2c\alpha-(b-2c\alpha)e^{c\alpha t}}.$$

§ 140. Corollario II. Per aver poi il tempo che impiega il getto a divenire invariabile, basterà nell' espressione trovata per t, sostituire H in vece di v, essendo H l'altezza dovuta alla velocità del fluido nella sezione ZZ a getto invariabile. Questo valore di v ci sarà dato dalla risoluzione di quest' equazione

$$\frac{4h\cdot\gamma}{\lambda\theta^4}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2 - \frac{4h}{\theta^2}(m+m')v - \frac{2\sqrt{h}}{\theta}(n+n')\sqrt{v} - (g+g') = o,$$

la quale è di secondo grado per l' incognita $\sqrt{v}$.

§. 141. Corollario III. Se poi vorremo la quantità di acqua che sgorga nel tempo t, o che in questo tempo traversa una sezione ZZ, ella si avrà dalla formola (9) o dalla (10); ma tanto i valori delle lettere a, b, c, quanto quelli delle quantità t, $\sqrt{v}$, saranno quelli del § 138.

CAPO II.

SOLUZIONE DEI PROBLEMI RELATIVI AL SECONDO E TERZO FENOMENO.

§ 142. Problema I. *Sgorgando dalla bocca* EF *un getto invariabile, se ad un tratto si ristringerà la mentovata bocca, onde non ne resti aperta che una porzione* EI, *si altererà il moto dell' acqua nella canna: ora cercasi in questo caso la relazione tra la celerità ed il tempo in quel moto ritardato che l' acqua avrà in una sezione* ZZ *della cannella.*

Soluzione.

H sia l' altezza dovuta alla celerità con la quale l' acqua traversava la sezione ZZ della canna, prima che se ne ristringesse la bocca.

V sia l' altezza della velocità con la quale l'acqua sgorgherebbe per CD' se la canna non ci fosse.

V' l' altezza della velocità con la quale l' acqua correr debbe nella canna, allorchè il getto per l' apertura EI è invariabile.

$\beta:1$ sia il rapporto dell' area della sezione ZZ all' area della porzione IE della bocca rimasta aperta.

Le tre altezze H, V, V' le suppongo date o dalla sperienza o dal calcolo.

v sia l' altezza della velocità nella sezione ZZ alla fine del tempo t.

Ritengansi poi le altre supposizioni dei precedenti problemi.

Rappresentando (§ 138) per $\frac{4h}{\theta^2} m'v + \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n'\sqrt{v} + g'$ la forza ritardatrice cagionata dal ristringimento della bocca della canna, si ha la stessa equazione differenziale tra il tempo e la celerità, la quale si ottiene pel problema V del capo antecedente; avremo in conseguenza $t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{2c\sqrt{v+b} - 2c\alpha}{2c\sqrt{v+b} + 2c\alpha} + C.$

La sola differenza consiste nella determinazione della costante: qui

conviene determinarla per modo che $t=0$ dia $v=H$: avremo allora

$$C=\frac{1}{c\alpha}\cdot log\,\frac{2c\sqrt{H}+b+2c\alpha}{2c\sqrt{H}+b-2c\alpha}$$, ed in conseguenza

$$(20)\;\ldots\; t=\frac{1}{c\alpha}\cdot log\,\frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)}$$

I valori di a, b, c sono quelli del § 138.

§ 143. Corollario I. Se si volesse avere il tempo che impiega il getto a divenire invariabile, basterebbe porre V' in vece di v nella formola (20), e questo tempo sarebbe

$$(21)\;\ldots\; t'=\frac{1}{c\alpha}\cdot log\,\frac{(2c\sqrt{V'}+b-2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{V'}+b+2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)}.$$

§ 144. Corollario II. Dalla formola (20) si ricava $\sqrt{v}$ dato per t, e si ha

$$(22)\;\ldots\; \sqrt{v}=\frac{(b+2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)e^{cat}-(b-2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)}{2c(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)-2c(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)e^{cat}}.$$

§ 145. Corollario III. Dalla formola (22) si ha la velocità della quale è dotata l'acqua nel traversare una qualunque sezione ZZ della canna, o per meglio dire si ha l'altezza che a quella velocità è dovuta alla fine del tempo t: se ora quella velocità si moltiplicherà per l'area della detta sezione, e si dividerà per l'area della porzione EI della bocca ch'è rimasta aperta, ciò che equivale a dire, se quella velocità si moltiplicherà per β, si avrà la velocità con la quale l'acqua alla fine del tempo t zampilla dalla bocca ristretta EI; e parlando dell'altezza dovuta alla velocità, si avrà l'altezza della velocità dell'acqua che sgorga per EI, moltiplicando pel quadrato β^2 l'altezza dovuta alla celerità che in quel medesimo istante ha l'acqua nella sezione ZZ della canna.

§ 146. Corollario IV. E per avere la quantità di acqua che da quella bocca ristretta EI sgorga nel tempo t (la quale è la medesima di quella che in detto tempo traversa la sezione ZZ) si farà uso della formola $Q=\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\sqrt{v}\,dt$; la quale noi tratteremo, come si fece al § 129 pel Problema II; e troveremo egualmente

$$(23).\ Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta \alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot \log\frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b+2c\alpha+2c\sqrt{H}} - (b-2c\alpha)\cdot \log\frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b-2c\alpha+2c\sqrt{H}}\right\}.$$

Rammento che i valori di a, b, c sono quelli del § 138.

§ 147. PROBLEMA II. *Supponendo che l' acqua sgorghi dalla bocca* EF (F. 5.) *della canna con una data velocità; se tutto ad un tratto si pone alla bocca un ostacolo, per esempio una cateratta che fermi intieramente il fluire dell' acqua, si cerca l' espressione dello sforzo che in quel momento fa l' acqua sopra una data porzione della cateratta medesima.*

SOLUZIONE.

Sia W la data velocità con la quale l' acqua sgorga da EF;

λ la lunghezza della canna;

D la densità dell' acqua;

a' sia l' area della bocca EF, la quale noi supponiamo eguale a quella di una qualunque sezione della canna.

Allorchè in un tratto si chiude con una cateratta la bocca della canna, l' intiera massa della colonna fluida ch' è nella canna, e che prima di quel chiudimento era dotata della velocità W, estinguerà il suo moto, facendo un' impulsione sopra ciascun punto fisico della cateratta, eguale al momento distrutto. Ora $\lambda Da'$ è la massa di quella colonna fluida; sarà dunque $\lambda Da'W$ quel momento distrutto, cui è eguale la su mentovata impulsione. Ma $\lambda Da'W$ non sarà il solo momento che debbe distruggersi; anche l' acqua ch' è nel vaso, si ferma. Sia A l' altezza dell' acqua nel vaso che io suppongo prismatico. Sia b' la di lui sezione, e sarà $\frac{Wa'}{b'}$ la velocità che vi avrà il fluido; quindi il momento di quell' acqua che è in moto dentro del vaso, sarà $Ab'D\cdot\frac{Wa'}{b'} = Aa'DW$: sarà dunque il momento totale che debbe distruggersi, ed a cui è eguale lo sforzo sulle pareti,

$$(24) \ldots\ \lambda Da'W + Aa'DW = a'DW(A+\lambda).$$

E tale sarà la misura dell' impulsione che si esercita sopra ciascun punto fisico della cateratta (compresi anche i punti del contorno EF) la quale chiude istantaneamente la bocca EF.

Dunque lo sforzo che soffrirà una porzione β della cateratta, sarà
(25) . . . . $\beta a' DW (A + \lambda)$.

§ 148. Corollario I. Lo sforzo poi o l'impulsione sopra l'intiera cateratta (vale a dire sopra la porzione di essa che chiude l'intiera bocca EF) sarà $a'.a' DW (A + \lambda)$ ovvero
(26) . . . . $a'^2 DW (A + \lambda)$.

§ 149. Corollario II. Se la bocca EF, per cui usciva l'acqua, fosse stata guarnita di un orlo che, ristringendola internamente, ne rendesse l'area minore della sezione della canna, allora la velocità della bocca EF non sarebbe la medesima che la velocità in una sezione ZZ; ma se W indicherà la celerità nella bocca EF, ed a' la di lei area, sarà medesimamente $a'^2 DW (A + \lambda)$ la spinta sopra l'intiera cateratta; e $\beta a' DW (A + \lambda)$ quella sopra una di lei porzione β.

§ 150. Corollario III. In generale, qualunque sia la figura della canna e del vaso, con un simil ragionamento proveremo *Che mentre si arresta istantaneamente il fluire dell'acqua, il quale facevasi dalla bocca* EF *con una certa velocità* W, *si fa un urto sopra una porzione* β *dell'ostacolo che chiude la bocca, il quale ha per misura la stessa area* β, *moltiplicata pel momento che aveva l'acqua, prima di esser fermata. Un tal momento poi è quello della massa di una colonna acquea, la cui base è l'area stessa della bocca* EF, *e l'altezza è eguale alla lunghezza della canna aumentata dell'altezza dell'acqua nel vaso, moltiplicata questa massa per la velocità che l'acqua aveva nello sbocco* EF, *quando si arrestò il getto.*

§ 151. Scolio. Io ho detto (§ 147) che $a' DW (A + \lambda)$ rappresenta la spinta dell'acqua sopra ciascun punto fisico della cateratta la quale chiudeva la bocca EF, e che perciò $\beta a' DW (A + \lambda)$ rappresentava quella sopra la porzione β della cateratta medesima. Ciò dipende dalla comunicazione laterale degli sforzi nei fluidi incompressibili. Ciascuno de' filetti fluidi componenti la colonna acquea $CDEF$ non solo fa un'impulsione sopra il punto fisico della cateratta ch'egli incontra; ma ancora sopra tutti gli altri punti della medesima cateratta si propaga quell'impulsione, e si propaga con la medesima gagliardia; ed avvenendo ciò per tutt' i filetti fluidi, ne segue che ogni

punto fisico sentirà l' impulsione di un filetto fluido tante volte ripetuta, quanti sono questi filetti medesimi. L'urto adunque dell'acqua sopra un punto fisico della cateratta sarà misurato dal momento di uno di quei filetti fluidi, moltiplicato pel numero totale dei filetti, i quali compongono la colonna cilindrica che ha per base l' area a' della bocca EF; egli avrà dunque per misura la massa di quella colonna fluida moltiplicata per la velocità da cui è animata.

§ 152. PROBLEMA III. *Nelle stesse circostanze del Problema precedente* (F. 5.), *si dimanda l' espressione dello sforzo che fa l' acqua sopra un punto fisico di una data sezione* ZZ *della canna*, *mentre in un tratto si chiude la bocca* EF, *e si arresta in conseguenza il getto del fluido.*

SOLUZIONE. Mantenute le supposizioni del Problema precedente, l sia la distanza data della sezione ZZ dalla bocca EF della canna.

La porzione $ZZFE$ della colonna fluida contenuta nella canna non esercita, mentre si ferma il getto, nè può esercitare alcuna forza contro i punti compresi in ZZ, nè contro di quei che trovansi compresi tra CD e ZZ; quindi il momento, che fa impulsione sopra i punti fisici contenuti in ZZ, è quello della colonna fluida rinchiusa nella porzione della canna $CDZZ$, e del fluido contenuto nel vaso M: dunque l' espressione della ricercata impulsione sarà
(27) . . . . $a'DW(A+\lambda-l)$.

§ 153. COROLLARIO I. Dunque l' espressione dell' impulsione sopra una porzione β delle pareti (della qual porzione tutti i punti possano prossimamente considerarsi distanti da FE di una stessa quantità l) sarà
(28) . . . . $\beta a'DW(A+\lambda-l)$.

§ 154. SCOLIO I. Noi abbiamo detto che nello stimare l' impulsione fatta sopra un punto materiale delle pareti, non debbe tenersi conto del momento di quel pezzo di colonna fluida compreso tra di esso punto e la bocca EF dalla canna. Ora è da rintracciarne la ragione. Supponiamo che nell' atto in cui si ferma il getto, la porzione della colonna acquea $CDZZ$ si congeli e formi un cilindro solido; in questa ipotesi la spinta dell' acqua contro i punti

compresi nella porzione delle pareti $ZEFZ$, rimarrà quale era prima, mentre niuna spinta soffriranno quei delle pareti $CDZZ$; dunque la porzione della colonna $ZEFZ$ nulla ha a che fare con l'impulsione che l'acqua fa sui punti compresi nelle pareti $CZZD$. È la stessa cosa come nei vasi ripieni di fluido stagnante sino ad una certa altezza: la pressione sopra un punto materiale delle pareti è sempre proporzionale all' altezza del livello del fluido sopra di questo punto, senza che nulla ci abbia che fare l'acqua che al di sotto di quel punto medesimo trovasi tra di esso ed il fondo del vaso.

§ 155. Corollario II. Supponiamo ora che in un subito resti chiusa, non tutta la sezione EF della bocca, ma una sua porzione $\alpha' - \beta'$; sarà in conseguenza β' la porzione che rimane aperta: in questo caso la colonna fluida di cui è impedito lo sgorgo, sarà soltanto $(\alpha' - \beta')(A + \lambda)$, e quindi il di lei momento, il quale ha da esser distrutto, sarà $(\alpha' - \beta') DW (A + \lambda)$. Dunque lo sforzo o l'impulsione dell' acqua sopra ciascun punto materiale della porzione $\alpha' - \beta'$ sarà eguale a questo momento distrutto; lo sforzo pertanto sopra una parte β di detta porzione, sarà

(29) . . . . $(\alpha' - \beta')\beta DW(A + \lambda)$.

Lo sforzo poi sopra un punto delle pareti, situato ad una distanza l dalla bocca EF, sarà $(\alpha' - \beta') DW (A + \lambda - l)$; e sopra una porzione β di esse, i di cui punti possano tutti considerarsi alla distanza l dalla bocca, sarà

(30) . . . . $(\alpha' - \beta')\beta DW(A + \lambda - l)$.

§ 156. Scolio II. Questi sforzi dell' acqua arrestata producono nelle pareti un distendimento che tende a sfiancare la canna, e non è difficile calcolare queste forze di distendimento; in fatti tutti i Problemi e Teoremi che si risolvono e dimostrano nelle ordinarie Teoriche dell'Idrostatica, per calcolare lo sforzo col quale i fluidi stagnanti tendono a sfiancare le pareti delle canne, possono proporsi e nella stessa guisa risolversi o dimostrarsi nel caso attuale, ma conviene sostituire alla forza di pressione dell'acqua stagnante la forza d'impulsione dell'acqua in moto.

Così, per esempio, trovasi nell' Idrostatica dimostrato questo Teorema: *Se ad una conserva piena d' acqua si adatta un canale cilindrico esteriormente chiuso e di pareti puramente superficiali, la pressione del fluido contro la superficie interna del canale, produce in ciascun elemento di una qualunque sezione circolare del canale una tensione o distrazione la quale ha per misura il prodotto del suo diametro per la distanza del centro di quella sezione dalla superficie dell' acqua della conserva* (Bossut *Idrodinamica*, § 40).

E nel nostro caso si può egualmente dimostrare quest' altro Teorema: *Se ad una conserva ripiena d' acqua si adatta un canale cilindrico orizzontale e di pareti puramente superficiali, e se mentre l' acqua con la velocità W sgorga per la bocca del canale di cui l' area sia* a', *tutta ad un tratto si chiude una porzione* $a'\beta'$ *della di lui bocca, l' impulsione del fluido contro la superficie interna del canale in quell' istante, produce in ciascun elemento della periferia di una qualunque sezione circolare del canale distante dalla bocca di una quantità* l, *produce, dico, una tensione o distrazione la quale ha per misura il prodotto del suo semidiametro nella quantità* $(a'-\beta')DW(A+\lambda-l)$; *indicando per* λ *la lunghezza del canale, per* A *l' altezza dell' acqua nel recipiente, e per* D *la quantità specifica dell' acqua.*

Se le pareti della canna avessero una grossezza, onde il raggio della periferia interna fosse R, quello dell' esterna R', allora dovremmo prender $\frac{1}{2}(R+R')$ per quel semidiametro di cui parla il Teorema, e si avrebbe così un risultato prossimo al vero.

§ 257. Scolio III. Supponiamo che nella parete superiore della canna siavi una piccola apertura circolare, la cui area sia β, e distante della quantità l dallo sbocco. Sopra di quest' apertura sia collocata una palla pesante che la chiuda benissimo. Allorchè con l' incastrare la cateratta FE s' impedirà in un tratto lo sgorgo del fluido, quella palla sarà urtata dall' acqua con un momento di forza $\beta a' DW(A+\lambda-l)$; se dunque indichiamo per M la massa di quella palla, sarà

(31) . . . . $\frac{\beta a' DW(A+\lambda-l)}{M}$ la velocità che quella palla acquisterà

in virtù di tale impulsione; e questa velocità sarà in conseguenza tanto minore, quanto più pesante sarà la palla, ma non accadrà mai che sia nulla.

Conosciuta poi la velocità con la quale viene scagliata quella palla, sarà sempre facile trovare, per mezzo delle conosciute formole sulla caduta dei gravi, l'altezza cui quella palla potrà giungere, ed il tempo che v'impiegherà.

CAPO III.

SOLUZIONE DI ALCUNI ALTRI PROBLEMI NECESSARJ AL CALCOLO DELL' ARIETE IDRAULICO.

§ 158. PROBLEMA I. *Siano due vasi* M, M' *comunicanti tra loro per mezzo della canna orizzontale* CDp (F. 6.), *come abbiamo supposto al* § 61 *e seguenti: supponiamo che l'acqua anche nel vaso* M' *si conservi sempre allo stesso livello, traboccando successivamente dal livello* A'B' *quella che vi s' introdurrà per l'apertura* p. *Sia l'apertura* EF *di tale grandezza che possa somministrare all'acqua uno sgorgo egualmente comodo, come glielo somministrerebbe l'orificio* p, *se mettesse foce nell'aria: ciò supposto, se, uscendo l'acqua dal foro* EF *con una data velocità, tutto ad un tratto si chiudesse quell'apertura* EF, *l'acqua, aprendo l'animella* H, *incomincerebbe ad introdursi nel vaso* M'. *Ora cercasi alla fine del tempo* t (*contandosi questo tempo dall'istante nel quale chiudesi il foro* EF *ed apresi il foro* p) *la relazione tra la velocità ed il tempo nel moto che ha l'acqua in una sezione ZZ della canna.*

SOLUZIONE. Conservate le supposizioni e circostanze del Problema I del capo I, supponiamo che il foro p sia l'intiera bocca della canna, e che l'acqua sgorghi dall'apertura EF con la stessa facilità con la quale sgorgherebbe dal foro p se il vaso M' non ci fosse.

Sia V' l'altezza dovuta alla velocità con la quale l'acqua del vaso M' potrebbe sboccare dall'apertura p, se la canna non ci fosse.

Sia H l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua, allorchè sgorga dal foro EF.

Sia, infine, $1 : \delta$ il rapporto dell' area di una sezione del condotto all' area di una sezione normale all' asse del vaso M'.

La velocità relativa, con la quale la colonna fluida, nell' introdursi nel vaso M', urterà l' acqua che vi si trova, sarà $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}(\sqrt{v}+\sqrt{V'})$, dunque a tenore di quanto si è detto al § 119, la forza ritardatrice che viene da questo urto, sarà $\frac{4h \cdot s}{\theta^2}(\sqrt{v}+\sqrt{V'})^2$; a questa forza ritardatrice conviene aggiugnere quella prodotta dalla resistenza d'attrito, che l' acqua soffre nel condotto, la quale (120) è $\frac{4h}{\theta^2}mv+\frac{2\sqrt{h}}{\theta}n\sqrt{v}+g$, e di più quella, che è cagionata dalla resistenza di attrito che che prova l' acqua ad innalzarsi entro del vaso M', la quale sarà rappresentata da questa formola $\frac{4h}{\theta^2}\mu\frac{v}{\delta^2}+\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\nu\cdot\frac{\sqrt{v}}{\delta}+\varepsilon$;

per tanto la forza acceleratrice totale alla fine del tempo t, sarà

$$\frac{4h}{\lambda\theta^2}\left\{(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-(\sqrt{v}+\sqrt{V'})^2\right\}s - \frac{4h}{\theta^2}\left(m+\frac{1}{\delta^2}\mu\right)v-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\left(n+\frac{1}{\delta}\nu\right)\sqrt{v}-g-\varepsilon,$$

la quale eguagliata a $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ ci darà l' equazione del movimento; Ora poniamo $\frac{\sqrt{h}}{\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}}\left(\frac{dv}{dt}\right)$ in vece di $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ e quest' equazione diverrà

$$(32)\ldots dt\left\{\frac{4h}{\lambda\theta^2}s\left[(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-(\sqrt{v}+\sqrt{V'})^2\right] - \frac{4h}{\theta^2}\left(m+\frac{1}{\delta^2}\mu\right)v-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\left(n+\frac{1}{\delta}\nu\right)\sqrt{v}-g-\varepsilon\right\}=\frac{\sqrt{h}}{\theta}\cdot\frac{dv}{\sqrt{v}},$$

alla quale si può dare la forma semplicissima

$dt=\frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}}$, come si fece per quella del § 121. Sarà, poi,

$$a = \frac{4\sqrt{h}}{\lambda\theta} \varepsilon (V - V') - \frac{\theta(g+\varepsilon)}{\sqrt{h}};$$

$$b = - \frac{8\sqrt{h}}{\lambda\theta} \varepsilon (\sqrt{V} + \sqrt{V'}) - 2\left(n + \frac{1}{\delta} \nu\right);$$

$$c = - \frac{4\sqrt{h}}{\theta}\left(m + \frac{1}{\delta^2} \mu\right);$$ onde

$$t = \int \frac{dv}{(a + b\sqrt{v} + cv)\sqrt{v}}.$$

Facendo ora $\frac{b^2 - 4ac}{4c^2} = \alpha^2$, noi troveremo, battendo la stessa via calcata al § 122, $t = \frac{1}{c\alpha} \cdot log \frac{2c\sqrt{v} + b - 2c\alpha}{2c\sqrt{v} + b + 2c\alpha} + C.$

Per determinare la costante C, osservo che $t = 0$ debbe dare $v = H$, e da questa condizione ricavo

$C = - \frac{1}{c\alpha} \cdot log \frac{2c\sqrt{H} + b - 2c\alpha}{2c\sqrt{H} + b + 2c\alpha}$, e quindi

$$(33) \; \ldots \; t = \frac{1}{c\alpha} \cdot log \frac{(2c\sqrt{v} + b - 2c\alpha)(2c\sqrt{H} + b + 2c\alpha)}{(2c\sqrt{v} + b + 2c\alpha)(2c\sqrt{H} + b - 2c\alpha)}.$$

§ 159 Corollario I. Se in questa formola (33) facciamo $v = 0$, avremo

$$(34) \; \ldots \; t = \frac{1}{c\alpha} \cdot log \frac{(b - 2c\alpha)(2c\sqrt{H} + b + 2c\alpha)}{(2c\sqrt{H} + b - 2c\alpha)(b + 2c\alpha)}.$$

E da quest' ultima formola sarà rappresentato il tempo, al terminar del quale cesserà l' acqua di entrare nel vaso M'; in guisa che se non ci fosse l' animella che lo impedisse, l' acqua allora incomincerebbe ad uscire dal vaso M', ed il moto si farebbe retrogrado.

§ 160. Corollario II. E l' espressione della quantità di acqua che nel tempo t ha sgorgato nel vaso M', si può avere, come al § 129, data per mezzo di $\sqrt{v}$, e questa è

$$Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2}\left\{(b + 2c\alpha) \cdot log(b + 2c\alpha + 2c\sqrt{v}) - (b - 2c\alpha) \cdot log(b - 2c\alpha + 2c\sqrt{v})\right\} + C.$$

Qui però debbe determinarsi la costante per modo che $v = H$ dia $Q = 0$: allora si ha

$$(35)\,..\; Q = \frac{a'\sqrt{h}}{6ac^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot log\,\frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b+2c\alpha+2c\sqrt{H}} - (b-2c\alpha)\cdot log\,\frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b-2c\alpha+2c\sqrt{H}}\right\};$$

se poi faremo $v = o$, si avrà tutta la quantità di acqua ch' è entrata nel vaso M' espressa da questa formola

$$(36)\,..\; Q = \frac{a'\sqrt{h}}{6ac^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot log\,\frac{b+2c\alpha}{b+2c\alpha+2c\sqrt{H}} - (b-2c\alpha)\cdot log\,\frac{b-2c\alpha}{b-2c\alpha+2c\sqrt{H}}\right\}.$$

§ 161. Corollario III. Se vorremo la quantità di acqua espressa per mezzo del tempo, la potremo avere adoperando la formola (9) del § 127, la quale è anche buona pel caso presente; i valori però di a, b, c sono quei del § 158.

§ 162. Corollario IV. Volendo ridurre in serie il valore di t dato dalla formola (33) ecco come faremo: quel valore prende anche questa forma

$$t = \frac{1}{c\alpha}\cdot log\,\frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)\,(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)\,(b-2c\alpha)} - \frac{1}{c\alpha}\cdot log\,\frac{(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)\,(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)\,(b-2c\alpha)}.$$

Ora la formola (8) del § 125 ci dà il valore del primo termine di questo secondo membro espresso per serie: e se rappresentiamo con A', A'', A''' ecc. i coefficienti di quella serie, potremo esprimere questo termine con la serie

$$A'\sqrt{v} + A''v + A'''v^{\frac{3}{2}} + A''''v^2 + \text{ecc.}$$

L' altro termine adunque sarà rappresentato nella stessa guisa da

$$-A'\sqrt{H} - A''H - A'''H^{\frac{3}{2}} - A''''H^2 - \text{ecc.};$$

ed avremo in fine

$$(37)\,.\,.\,.\; t = A'(\sqrt{v} - \sqrt{H}) + A''(v - H) + A'''(v^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}) + \text{ecc.}$$

§ 163. Corollario V. Se da quest' ultima formola ricaviamo il valore di dt, lo sostituiamo in $Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{6}\int\sqrt{v}dt$, e poi si faccia l' integrazione, avremo la medesima formola (12) del § 131, cioè

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{6}\left\{\tfrac{1}{2}A'v + \tfrac{2}{3}A''v^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}A'''v^2 + \text{ecc.}\right\} + C;$$

e determinando la costante in modo che $v = H$ dia $Q = o$, si troverà

$$(38) \ldots Q = \frac{2a' \sqrt{h}}{\theta} \left\{ \tfrac{1}{2} A' (v - H) + \tfrac{2}{3} A'' (v^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}) + \tfrac{3}{4} A''' (v^2 - H^2) + \text{ecc.} \right\};$$

e questa sarà la serie che esprime la quantità dell' acqua che è sboccata nel vaso M'.

§ 164. Scolio. Il valore di t e quello di Q, che noi abbiamo trovato nel precedente problema, dipendono dall' integrazione della formola $\frac{dv}{(a + b\sqrt{v} + cv)\sqrt{v}}$, la quale integrazione noi abbiamo potuto eseguire. Ora se il coefficiente c fosse nullo, allora le formole ottenute per esprimere t e Q diverrebbero infinite, giacchè quel coefficiente nullo s' incontra nei denominatori. In questo caso le formole non significherebbero cosa alcuna; allora però noi otterremo la bramata integrazione per altra via. Sia dunque $c = o$, e converrà integrare la formola $t = \int \frac{dv}{(a + b\sqrt{v})\sqrt{v}}$.

A tal fine poniamo $\sqrt{v} = x$, si troverà $t = 2\int \frac{dx}{a + bx}$, e fatta l' integrazione, $t = \frac{2}{b} \cdot log\,(a + bx) + C = \frac{2}{b} \cdot log\,(a + b\sqrt{v}) + C$. Determiniamo la costante per modo che, fatto $v = H$, abbiasi $t = o$, e sarà allora

$$(39) \ldots . \; t = \frac{2}{b} \cdot log\, \frac{a + b\sqrt{v}}{a + b\sqrt{H}}.$$

§ 164. Corollario I. Se nella ritrovata espressione di t facciamo $v = o$, avremo

$$(40) \ldots . \; t = \frac{2}{b} \cdot log\, \frac{a}{a + b\sqrt{H}},$$ e sarà questo il tempo al terminar del quale cesserà d' entrare l' acqua nel vaso M'.

§ 165. Corollario II. Dalla formola (39) si può ricavare il valore di $\sqrt{v}$ dato per t, e si ha

$$(41) \ldots . \; \sqrt{v} = \frac{(a + b\sqrt{H})e^{\frac{bt}{2}} - a}{b}.$$

§ 166. Corollario III. Se si vorrà l' espressione della quantità di acqua entrata nel vaso M' nel tempo t, si potrà averla dalla formola $Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\sqrt{v}dt$; in fatti sostituendo a $\sqrt{v}$ il ritrovato valore, si troverà

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\int\frac{(a+b\sqrt{H})e^{\frac{bt}{2}}-a}{b}dt, \text{ e quindi}$$

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta b}\left\{\frac{2(a+b\sqrt{H})e^{\frac{bt}{2}}}{b} - at\right\} + C;$$

Determiniamo la costante per modo che $t = o$ dia $Q = o$, e si avrà

$$(42) \ldots\ldots Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta b}\left\{\frac{2(a+b\sqrt{H})}{b}\left(e^{\frac{bt}{2}} - 1\right) - at\right\}.$$

§ 167. Corollario IV. Ponendo nella formola (42) in vece di t il suo valore $\frac{2}{b}\cdot log\frac{a}{a+b\sqrt{H}}$, si avrà

$$(43) \ldots Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta b}\left\{\frac{2a}{b} - \frac{2a}{b}\cdot log\frac{a}{a+b\sqrt{H}} - \frac{2(a+b\sqrt{H})}{b}\right\}$$

$$= \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta b}\left\{-\frac{2a}{b}\cdot log\frac{a}{a+b\sqrt{H}} - 2\sqrt{H}\right\};$$

e questa formola rappresenterà tutta la quantità di acqua che sarà entrata nel vaso M' dall' istante nel quale comincia lo sgorgo, sino a quello nel quale finisce.

§ 168. Problema II. *Poste tutte le cose come nel Problema precedente, ma la luce dello sbocco* p *(F. 6) essendo minore di quella dello sbocco* EF *in ragione di* 1 : β, *si dimanda la relazione tra la velocità ed il tempo nel moto, che l' acqua avrà in una sezione* ZZ *della canna alla fine del tempo* t, *contato questo tempo dall' istante nel quale si è chiusa l' apertura* EF, *e l' acqua è obbligata ad entrare dalla bocca* p *nel vaso* M'.

Soluzione. Fatte le stesse supposizioni del Problema precedente, io osservo che se v è l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua nella sezione ZZ alla fine del tempo t, sarà $\beta^2 v$ l' altezza dovuta

alla velocità con la quale l'acqua in quell' istante entrerà nel vaso M' dalla bocca p.

Ciò premesso, facilmente vedremo che la forza acceleratrice, alla fine di quel tempo, sarà composta non solo dei tre termini

$$\frac{4h}{\lambda\theta^2}\upsilon\,(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-\left\{\frac{4h}{\theta^2}mv+\frac{2\sqrt{h}}{\theta}n\sqrt{v}+g\right\}-$$

$$\left(\frac{4h}{\theta^2}m'v+\frac{2\sqrt{h}}{\theta}n'\sqrt{v}+g'\right),$$

come nel Problema I, capo II; ma ancora dei termini

$$-\frac{4h}{\lambda\theta^2}\upsilon\,(\beta\sqrt{v}+\sqrt{V'})^2-\left\{\frac{4h}{\delta^2\theta^2}\mu v+\frac{2\sqrt{h}}{\delta\theta}\nu\sqrt{v}+\varepsilon\right\}$$ dovuti alla

resistenza che l' acqua incontra per parte del fluido contenuto in M', ed a quella causata dal ristringimento fatto al foro p; avremo dunque

$$(44)\ldots dt\left\{\frac{4h}{\lambda\theta^2}\upsilon\left((\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-(\beta\sqrt{v}+\sqrt{V'})^2\right)-\right.$$

$$\left.\frac{4h}{\theta^2}\left(m+m'+\frac{\mu}{\delta^2}\right)v-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\left(n+n'+\frac{\nu}{\delta}\right)\sqrt{v}-(g+g'+\varepsilon)\right\}=\frac{\sqrt{h}}{\theta}\cdot\frac{dv}{\sqrt{v}}.$$

Da siffatta equazione si ricava, come al § 158;

$$(45)\ldots\ldots t=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)},$$

ma i valori di a, b, c sono i seguenti

$$a=\frac{4\sqrt{h}}{\lambda\theta}\upsilon\,(V-V')-\frac{\theta}{\sqrt{h}}(g+g'+\varepsilon),$$

$$b=-\frac{8\sqrt{h}}{\lambda\theta}\upsilon\,(\sqrt{V}+\beta\sqrt{V'})-2\left(n+n'+\frac{\nu}{\delta}\right),$$

$$c=\frac{4\sqrt{h}}{\lambda\theta}\upsilon\,(1-\beta^2)-\frac{4\sqrt{h}}{\theta}\left(m+m'+\frac{\mu}{\delta^2}\right).$$

§ 169. Corollario I. Se nella formola (45) faremo $v=o$, avremo

$$(46)\ldots\ldots t=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{(b-2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)}{(b+2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)},$$

e questo sarà il tempo, per tutta la durata del quale continua l'acqua ad entrare nel vaso M'.

§ 170. COROLLARIO II. Il valore poi dell' altezza dovuta alla velocità, espresso questo valore per mezzo del tempo, sarà

$$(47) \ldots . \sqrt{v} = \frac{(b+2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)e^{cat}-(b-2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)}{2c(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)-2c(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)e^{cat}}.$$

§ 171. COROLLARIO III. La quantità di acqua che entrerà nel vaso M' nel tempo t, sarà quella che traverserà la sezione ZZ nel detto tempo; dunque questa quantità di acqua sarà data dalle formole (35) e (36) del § 160; ma in esse dovremo porre per a, b, c i valori del § 168.

§ 172. SCOLIO I. Se, a misura che entra dell' acqua nel vaso M', non traboccasse, ma se ne aumentasse il livello, allora, nelle equazioni (32), (44) dei §§ 158 e 168, la quantità indicata da V' non sarebbe costante. Infatti, dipendendo V' dall' altezza che ha l' acqua nel vaso M', essa V' varierà, se varierà quest' altezza di acqua. Sia A' l' altezza del livello $A'B'$ sul centro del foro p, e sia $V' = f(A')$, cioè eguale ad una funzione di A'.

Supponendo il vaso prismatico e verticale, ed indicando con e una sua sezione orizzontale, se rappresenteremo con la lettera Q la quantità di acqua entrata nel vaso M' nel tempo t, sarà allora $\frac{Q}{e}$ l' altezza di cui si è elevato il livello; quindi sarà $f\left(A' + \frac{Q}{e}\right)$ il valore di V' alla fine del tempo t; e questo sarà quel valore da sostituirsi nelle due su indicate equazioni: allora si avrà un' equazione differenziale fra tre variabili v, t, Q; un' altra equazione differenziale fra le medesime variabili è $dQ = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v}dt$, e parlando col linguaggio dell' analisi, date due equazioni differenziali del primo ordine fra tre variabili, si può sempre trovare il valore di due di quelle variabili espresso per mezzo della terza. Torneremo, se ci verrà il bisogno, un' altra volta sopra questo soggetto.

§ 173. SCOLIO II. In tutti i problemi qui sopra risoluti ho supposto che la canna $CDEF$ fosse orizzontale: quando fosse stata inclinata, noi avremmo dovuto aggiungere alle considerate forze

acceleratrici, anche quella che nasce dalla gravità relativa della massa della colonna fluida, la quale si muove allora come sopra un piano inclinato. Io non ho bisogno di esaminare questo caso il quale non ammette d'altronde alcuna difficoltà.

§ 174. Scolio III. Nei Problemi sciolti in questi tre capitoli abbiamo sempre ricercata la relazione tra la velocità ed il tempo. Non abbiamo parlato delle relazioni tra lo spazio ed il tempo, e tra lo spazio e la celerità; queste però facilmente potranno aversi dalla conosciutissima formola $\left(\frac{ds}{dt}\right) = v'$: in fatti essendo espressa da v' la celerità, ed in conseguenza essendo $v' = \frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$, avremo $s = \frac{2\sqrt{h}}{\theta}\int \sqrt{v}\,dt$.

Se in questa formola sostituiremo il valore di $\sqrt{v}$ dato per mezzo di t, ed integreremo, avremo il valore dello spazio s espresso per mezzo del tempo; e se vi sostituiremo il valore di dt dato per mezzo di v e dv, ed integreremo; avremo lo spazio s dato per mezzo di v. È facile riconoscere che questi valori di s sono gli stessi che quei di Q divisi per α', ed è ancor facilissimo comprendere perchè ciò succeda.

§ 175. Scolio IV. Compagno del Problema I, capo I, è il seguente, del quale soltanto espongo l'equazione differenziale, da cui ne dipende la soluzione.

Essendo al foro CD *del vaso* M *una cateratta la quale impedisca, quando è chiusa, il passaggio dell'acqua nella canna, allorchè questo passaggio si lascia libero l'acqua incomincia a correre nella canna: ora cercasi l'equazione di questo moto.*

Tale equazione è quella stessa del mentovato Problema I; solo invece di λ, che esprime la lunghezza della canna, conviene metterci s: essa è dunque

$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{4h}{s\theta^2}(\sqrt{V} - \sqrt{v})^2 s - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} - g$, essendo

$\sqrt{v} = \frac{\theta}{2\sqrt{h}}\left(\frac{ds}{dt}\right)$. Essa è un'equazione differenziale di secondo ordine

e di secondo grado tra s e t, sulla quale non mi trattengo, giacchè essa non serve al mio oggetto.

§. 176. Problema III. *Abbiasi un vaso* EAF *che vada a finire in una canna cilindrica* MB, (F. 8.). BA *sia l' asse del vaso e della canna, e sia verticale. Nello spazio* EAF *siavi racchiusa dell' aria.* EF *sia un suolo sopra cui si appoggi la colonna acquea* CB, *che riempia il resto del vaso e della canna. Il suolo* EF, *che separa l' aria dall' acqua supponiamolo non pesante, e tale che possa liberamente alzarsi ed abbassarsi, allargarsi e ristringersi, combaciando sempre in modo con le pareti del vaso, da non lasciar comunicar tra di loro i due fluidi.*

Ciò posto, supponiamo che la forza elastica dell' aria contenuta nello spazio EAF *sia in equilibrio col peso della colonna premente, la quale si appoggia al suolo* EF. *Se con qualche mezzo si introduce tutta in un tratto una quantità di acqua* EGHF *nel vaso, la quale obblighi tutta l' aria contenuta nello spazio* EAF *a ristringersi nello spazio* GAH, *onde il suolo* EF *sia venuto in* GH, *si cerca in quanto tempo l' aria* GAH *ritornerà al suo primiero stato* EAF.

Soluzione. Sia $AD = b$,

$AC = a$;

L' area della sezione GH sia . . . . $= f\,(b)$;

Quella della sezione EF sia. . . . . $= f\,(a)$;

Il volume della porzione del vaso GAH sia . . . . . $= \psi\,(b)$;

Quello della porzione EAF . . . . $= \psi\,(a)$.

Sia $AP = x$, e sarà

L' area della sezione pp' . . . . $= f\,(x)$;

Il volume della porzione del vaso pAp'. . . . . $= \psi\,(x)$.

I segni f, ψ, ϕ, F ecc., che sovente adoperiamo, indicano funzioni delle quantità poste tra parentesi accanto ad esse.

Sia β l' area di una sezione del cannello verticale MB, normale all' asse;

A l' altezza di una colonna d' acqua la cui pressione equivalga a quella dell' atmosfera;

H in fine sia l' altezza BC.

Possiamo rappresentare per A la forza dell' elasticità dell' aria naturale, la cui mercè essa tende ad espandersi, ed allora quella dell' aria ristretta nello spazio EAF sarà rappresentata da $A+H$.

Quest' aria contenuta in EAF, se si trovasse nel suo stato naturale, occuperebbe uno spazio tanto maggiore di EAF, quanto $A+H$ è maggiore di A; dunque un tale spazio sarebbe rappresentato dalla formola $\frac{(A+H)\psi(a)}{A}$.

La forza elastica della mole di aria compressa nello spazio GAH sarà rappresentata da $\frac{(A+H)\psi(a)}{\psi(b)}$;
e la forza elastica della stessa massa di aria ridotta ad occupare lo spazio pAp', sarà rappresentata da $\frac{(A+H)\psi(a)}{\psi(x)}$.

La pressione poi sopra la superficie pp' sarà rappresentata da $H+A+a-x$.

Sia ora t il tempo impiegato dall' aria nel dilatarsi da GH in pp'.

Sia v l' altezza dovuta alla velocità del suolo d' aria pp', e di quello di acqua a lei contiguo: sarà $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v}$ questa stessa velocità (§ 119); la velocità poi che l' acqua avrà alla fine del tempo t in una qualunque sezione zz del cannello verticale sarà $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v}\times\frac{f(x)}{\beta}$.

La forza acceleratrice della quale è fornito ciascun punto della sezione pp', è composta della forza di elasticità $\frac{(A+H)\psi(a)}{\psi(x)}$, la quale tende ad aumentare la celerità della forza $H+A+a-x$ prodotta dalla pressione dell' acqua e dell' atmosfera sopraincumbente, che tende a diminuire la celerità, e della forza
$\frac{4hf^2(x)}{\theta^2\beta^2}mv+\frac{2\sqrt{h}\cdot f(x)}{\theta\beta}n\sqrt{v}+g$, che viene dalla resistenza di attrito, che l' acqua incontra nell' ascendere entro la canna MB.

Ora, in questo moto dell' acqua, lo spazio essendo rappresentato dalla lettera x, avremo l' equazione

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{(A+H)\psi(a)}{\psi(x)}-(A+H+a-x)-\frac{4hf^2(x)}{6^2\beta^2}mv-\frac{2\sqrt{h}f(x)}{6\beta}n\sqrt{v}-g\,;$$

Ma $\frac{2\sqrt{h}}{6}\sqrt{v}=\left(\frac{dx}{dt}\right)$, dunque (48) . . . .

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{(A+H)\psi(a)}{\psi(x)}-(A+H+a-x)-\frac{f^2(x)}{\beta^2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{f(x)}{\beta}n\left(\frac{dx}{dt}\right)-g;$$

e questa sarà l' equazione differenziale tra lo spazio ed il tempo.

§ 177. Trasformiamo l' equazione (48) in un' altra nella quale le differenziali siano prese a riguardo di x, o come suol dirsi, nella supposizione di dx costante. A tal fine bisognerà sostituirvi

$\frac{1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)}$ in vece di $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, e $-\frac{\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^3}$ in vece di $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$; il risultato allora di questa sostituzione, reso anche più semplice col porvi

$(A+H)\psi(a)=M$; $-(A+H+a+g)=N$; $-\frac{m}{\beta^2}=L$; $-\frac{n}{\beta}=K$, sarà

$$\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)+\left(\frac{M}{\psi(x)}+N+x\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)^3+Lf^2(x)\left(\frac{dt}{dx}\right)+Kf(x)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2=0;$$

supponiamo $\left(\frac{dt}{dx}\right)=p$, ed avremo

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=-\left\{\left(\frac{M}{\psi(x)}+N+x\right)p^3+Lf^2(x)p+Kf(x)p^2\right\};$$

quindi sarà

$$(49)\ .\ .\ .\ dp=-\left\{\left(\frac{M}{\psi(x)}+N+x\right)p^3+Kf(x)p^2+Lf^2(x)p\right\}dx.$$

Quest' ultima equazione, cui è ridotta l' equazione (48), è una equazione differenziale del primo ordine tra le due variabili x, p, della quale è inutile tentare in generale l' integrazione.

§ 188. Scolio I. Non potendo integrare generalmente l' equazione (48), farò alcune riflessioni sopra i risultamenti cui quell' integrazione ci condurrebbe.

In primo luogo osservo che l'integrale dell'equazione suddetta sarebbe $x = F\ (t, C, C')$, indicando per C, C' le due costanti arbitrarie; differenziando poi il valore di x, si avrebbe $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v} = F'(t, C, C')$, essendo $F'(t, C, C')$ il differenziale di $F(t, C, C')$: sarebbe dunque $\sqrt{v} = \frac{\theta}{2\sqrt{h}} F'(t, C, C')$.

Le due costanti C, C' dovrebbero aver tali valori da soddisfare alle condizioni che $t = o$ dia $x = b$, e $\sqrt{v} = o$; sarebbero dunque determinate dalle due equazioni $b = F(o, C, C')$; $o = F'(o, C, C')$. Dall' equazione poi $x = F(t, C, C')$ si ricaverebbe $t = \phi(x)$, e se si facesse $x = a$, si avrebbe $t = \phi(a)$, e questo sarebbe il tempo che l'acqua impiegherebbe a restituirsi da GH in EF.

§ 189. Scolio II. Lo spazio LAN sia occupato da aria nel suo stato naturale, ricoperta però dal suolo LN. Se si riempirà di acqua lo spazio $LE'BN$, ecco come potremo sapere la situazione EF, che prenderà il suolo LN, onde vi sia equilibrio tra la pressione dell' acqua e l' elasticità dell' aria.

Sia $AE' = c$; sarà il volume del vaso $LAN = \psi(c)$.

Sia $BA = H'$; $AC = y$, e sarà $CB = H' - y$: avremo adunque questa proporzione.

La forza di elasticità dell' aria naturale sta alla forza dell' elasticità dell' aria compressa in EAF come il volume EAF, cioè $\psi(y)$, al volume LAN, cioè $\psi(c)$;

Dunque la forza dell' elasticità dell' aria ridotta nello spazio EAF sarà $\frac{A\psi(c)}{\psi(y)}$; e tra questa forza, tra la pressione dell' acqua $H' - y$, e la pressioue (§ 176) dell' atmosfera indicata per A, dovrà esservi equilibrio; dunque $\frac{A\psi(c)}{\psi(y)} = A + H' - y$, dalla quale equazione determinar si debbe il valore di y.

Supponiamo che trovisi $y = \Gamma(c, H')$, indicando per $\Gamma(c, H')$ una funzione di c, H'; e questo sarà il valore di a preso per dato nel Problema precedente.

Avremo pertanto $t = \phi\,(a) = \phi\,\Big(\Gamma(c,\ H')\Big)$. Se poi fosse dato il tempo che impiegar si debbe in questo distendimento, e si cercasse la quantità di aria naturale da racchiudersi nello spazio LAN, allora dalla ottenuta equazione in t, c, H' bisognerebbe trovare il valore di c dato per mezzo di t e di H'.

CAPO IV.

CALCOLO DELL' OPERA DELL' ARIETE IDRAULICO.

§ 190. PROBLEMA I. *Dato un Ariete idraulico e data l' altezza cui si vuole innalzare l' acqua, assegnare la quantità di acqua perduta, e la quantità di acqua innalzata in un dato tempo.*

SOLUZIONE. Sia T il tempo dato; chiamisi t il tempo che corre dall' istante in cui nella durata di un colpo d' Ariete si apre la bocca del condotto dell' Ariete, all' istante in cui si chiude;

t' il tempo pel quale sta chiusa la bocca, ovvero il tempo pel quale l' acqua continua ad entrare nella campana dell' Ariete;

Q la quantità di acqua che sgorga dalla bocca del condotto nel tempo t; e questa è l' acqua perduta in un colpo dell' Ariete;

Q' quella che entra nella campana nel tempo t'; e questa è l' acqua innalzata in un colpo della macchina.

Ciò premesso, si vedrà facilmente che la durata di un colpo dell' Ariete sarà $= t + t'$;

La quantità di acqua innalzata nel tempo T sarà $\frac{T}{t+t'}\,Q'$;

Quella perduta $\frac{T}{t+t'}\,Q$; e $\frac{T}{t+t'}$ sarà il numero dei colpi che l' Ariete ha fatti nel tempo T.

Il Problema adunque sarà risoluto subito che si avranno i valori di t, t', Q, Q'.

COROLLARIO. Incominciamo dal supporre semplicissima la costruzione dell' Ariete, onde introdurre meno elementi che si può

nel computo; è vero che, forse, non potrebbe costruirsi in tal modo un Ariete, perchè la solidità e fermezza necessaria a darsi alle di lui parti obbliga a collegarlo con certi ritegni che fanno ostacolo ai movimenti dell' acqua; pure niun ci vieta di potere immaginare un Ariete scevro di quest' impacci; anzi il computo di una siffatta macchina ci farà strada a computare quelle che effettivamente si fabbricano.

Dalla Figura 8 sia rappresentato l' Ariete del quale vuolsi computare l' opera. Un' occhiata che il lettore dia alla figura ci risparmia una minuta descrizione; pure io avvertirò che qui suppongo,

1.° Che la bocca EF, quando ei resta aperto, lasci all' acqua tanta facilità per isgorgare, come se fosse una libera sezione della canna o del condotto, che, cioè, non arrechi alcun imbarazzo l' animella di fermata, nè l' orlo cui questa debbe appoggiarsi;

2.° Che l' apertura p sia tale, che quando per essa si obbligasse l' acqua a sgorgare nell' aria, si facesse lo sgorgo con la facilità stessa con la quale si fa dalla bocca EF;

3.° Che l' animella della salita ef abbia una gravità specifica eguale a quella dell' acqua, e sia congegnata in tal modo, che niun ostacolo arrechi all' acqua nel fluire dall' apertura p, e che di più l' animella si richiuda subito che l' acqua ha finito di sgorgare dal condotto nel vaso M';

4.° Che lo sbocco dal foro p si faccia in un vaso prismatico M', come ci mostra la figura; e che ripieno questo vaso di acqua sino in OO, tanta dall' alto ne trabocchi, quanta se ne introduce dall' apertura p;

5.° Che istantaneamente segua il chiudimento e l' aprimento dell' animella della fermata, come pure il chiudimento e l' aprimento di quella di salita.

Le prime quattro supposizioni possono artificialmente ottenersi; non così per la quinta; pure l' esperienza mostra che essa non è lontana dal vero, facendosi quei chiudimenti ed aprimenti in piccioli tempi non misurabili.

Ora, riflettendo alla struttura di questo Ariete, si vedrà che il

di lui computo dipende dalla soluzione dei Problemi I e II del capo I, e da quella del Problema I del capo III; e per ciò conservando le supposizioni fatte in quei Problemi, e supponendo che la ventola H' sia talmente congegnata che possa ricevere l' urto dell' acqua nell' istante, appunto, in cui il getto nella bocca EF diviene invariabile, si hanno le seguenti formole pei valori di t, t', Q, Q', le quali noi contrassegniamo col numero con cui sono indicate ai rispettivi loro luoghi.

$$(5) \ldots\ldots t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)(b-2c\alpha)};$$

$$(11) \ldots Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2} \left\{ (b+2c\alpha) \cdot \log \frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{H}}{b+2c\alpha} - (b-2c\alpha) \cdot \log \frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{H}}{b-2c\alpha} \right\};$$

essendo (121)

$$a = \frac{4\sqrt{h}\cdot\vartheta}{\lambda\theta} V - \frac{\theta g}{\sqrt{h}};$$

$$b = -\frac{8\sqrt{h}\cdot\vartheta}{\lambda\theta} \sqrt{V} - 2n;$$

$$c = \frac{4\sqrt{h}\cdot\vartheta}{\lambda\theta} - \frac{4\sqrt{h}}{\theta} m;$$

$$\alpha^2 = \frac{b^2-4ac}{4c^2}.$$

§ 191. E per le due quantità t', Q' prenderemo le formole

$$(34) \ldots\ldots t' = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(b-2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b+2c\alpha)}{(b+2c\alpha)(2c\sqrt{H}+b-2c\alpha)};$$

$$(36) \ldots Q' = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2} \left\{ (b+2c\alpha) \cdot \log \frac{b+2c\alpha}{b+2c\alpha+2c\sqrt{H}} - (b-2c\alpha) \cdot \log \frac{b-2c\alpha}{b-2c\alpha+2c\sqrt{H}} \right\};$$

ovvero le due

$$(40) \ldots\ldots t' = \frac{2}{b} \cdot \log \frac{a}{a+b\sqrt{H}};$$

$$(43) \ldots\ldots Q' = \frac{2a'\sqrt{h}}{\theta b} \left\{ \frac{2a}{b} - \frac{2a}{b} \cdot \log \frac{a}{a+b\sqrt{H}} - \frac{2(a+b\sqrt{H})}{b} \right\};$$

secondo che c è qualche cosa, o è nullo, a tenore di quanto si disse al § 164. I valori, poi, di a, b, c, α saranno (159)

$$a = \frac{4\sqrt{h}}{\lambda\theta}\, 8\,(V - V') - \frac{\theta(g+\varepsilon)}{\sqrt{h}};$$

$$b = -\frac{8\sqrt{h}}{\lambda\theta}\, 8\,(\sqrt{V} + \sqrt{V'}) - 2\left(n + \frac{1}{\delta}\,\nu\right);$$

$$c = -\frac{4h}{\theta}\left(m + \frac{1}{\delta^2}\,\mu\right);$$

$$\alpha^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4c^2}.$$

Potremo dunque trovare il valore dell'acqua perduta $\frac{T}{t+t'}\,Q$, e quello dell'acqua innalzata $\frac{T}{t+t'}\,Q'$, giacchè adesso tutto si ridurrà a computi numerici, se giungeremo ad esprimere in numeri le quantità che in questi problemi si prendono per date; ma di ciò parleremo nel capo I della terza parte.

§ 192. Corollario II. Se l'animella della fermata si chiudesse prima che il getto fosse divenuto invariabile, in vece allora delle due formole (5), (11) qui sopra riferite, dovremmo per t e per Q prendere queste altre:

$$(2) \ldots t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(2c\sqrt{v} + b - 2c\alpha)(b + 2c\alpha)}{(2c\sqrt{v} + b + 2c\alpha)(b - 2c\alpha)};$$

$$(10) \ldots Q = \frac{a'\sqrt{h}}{6\alpha c^2}\left\{(b + 2c\alpha) \cdot \log \frac{b + 2c\alpha + 2c\sqrt{v}}{b + 2c\alpha} - (b - 2c\alpha) \cdot \log \frac{b - 2c\alpha + 2c\sqrt{v}}{b - 2c\alpha}\right\};$$

essendo v l'altezza dovuta alla velocità che l'acqua ha nel condotto nell'istante in cui chiudesi quell'animella. I valori di a, b, c sono quei del § 121.

§ 193. Corollario II. Supponiamo che a principio l'acqua nel vaso M' sia allo stesso livello $A'\,B'$, cui è l'acqua della conserva M, e cerchiamo di sapere a qual livello $A''\,B''$ giungerà l'acqua in un primo colpo d'Ariete, a quale livello $A'''\,B'''$ giungerà in un secondo colpo, ed in fine dopo quanti colpi di Ariete e dopo quanto

tempo giungerà in OO, per traboccare; converrà allora risolvere il Problema indicato al § 172. Questo conduce ad una equazione differenziale di secondo ordine, l' integrazione della quale, per verità, supera le attuali forze dell' analisi, ma ciò non ostante si potrà per approssimazione ottenere l' intento in questa maniera. Incominceremo dal trovare la quantità di acqua Q' ed il tempo t' con la supposizione che l' acqua trabocchi per $A'\,B'$. Ciò fatto, divideremo la quantità di acqua Q' per l'area del vaso M' (che suppongo $= c$), e sarà $\frac{Q'}{c}$ l' altezza di cui l' acqua sarà salita nel vaso M' in un primo colpo di Ariete; ma, per aver più esattamente quest' altezza, noi ripeteremo il calcolo, supponendo che l' altezza dell' acqua nel vaso M' sia quella del livello $A'\,B'$, accresciuta della metà di $\frac{Q'}{c}$, e troveremo allora due valori di t' e di Q' più vicini al vero, e quindi anche un valore più vicino al vero per l' altezza $A'\,A''$, di cui l' acqua in un colpo di Ariete crescerà nel vaso M'. La stessa strada terremo per calcolare l' alzamento dell' acqua in un secondo colpo, in un terzo ecc; e così potremo sapere dopo quanti colpi ed in quanto tempo l' acqua giungerà a traboccare da OO.

§ 194. Corollario III. Supponiamo adesso che, costrutto l'Ariete come è detto al § 191, sia però la bocca EF del condotto guarnita di un orlo o telajo che ne ristringa l' area e serva d' appoggio all' animella della fermata; supponiamo anco che il pertugio p, per cui l' acqua entra nel vaso M', sia minore in area, della sezione ZZ del condotto. Così formato l' Ariete, il computo dipenderà dalla soluzione dei Problemi V del capo I, e II del capo III; e fatte le stesse supposizioni come in quei Problemi e posto che l' animella della fermata si chiuda, quando la velocità dell' acqua nella sezione ZZ è quella dovuta ad un' altezza v, si hanno i valori necessarj t, t', Q, Q'. Quei di t e di Q ci sono dati dalle formole

$$(18) \ldots\ldots t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(b-2c\alpha)},$$

$$(10) \ldots Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta \alpha c^2} \left\{ (b+2c\alpha) \cdot \log \frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b+2c\alpha} - (b-2c\alpha) \cdot \log \frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b-2c\alpha} \right\};$$

essendo

$$(E) \ldots \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{4\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta} V - \frac{\theta(g+g')}{\sqrt{h}}; \\ b &= -\frac{8\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta}\sqrt{V} - 2(n+n'); \\ c &= \frac{4\sqrt{h}\cdot\gamma}{\lambda\theta} - \frac{4\sqrt{h}}{\theta}(m+m'). \end{aligned} \right.$$

Se poi per $\sqrt{v}$ sostituiremo in queste formole il di lei valore ricavato dalla risoluzione dell' equazione del § 140, avremo il tempo e la quantità di acqua che convengono al getto invariabile. E quei valori di t', Q' da quest' altre formole:

$$(46) \ldots t' = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(b-2c\alpha)(b+2c\alpha+2c\sqrt{H})}{(b+2c\alpha)(b-2c\alpha+2c\sqrt{H})};$$

$$(36) \ldots Q' = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta \alpha c^2} \left\{ (b+2c\alpha) \cdot \log \frac{b+2c\alpha}{b+2c\alpha+2c\sqrt{H}} - (b-2c\alpha) \cdot \log \frac{b-2c\alpha}{b-2c\alpha+2c\sqrt{H}} \right\};$$

essendo però

$$(F) \ldots \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{4\sqrt{h}}{\lambda\theta}\gamma(V-V') - \frac{\theta}{\sqrt{h}}(g+g'+\varepsilon); \\ b &= -\frac{8\sqrt{h}}{\lambda\theta}\gamma(\sqrt{V}+\beta\sqrt{V'}) - 2\left(n+n'+\frac{\nu}{\delta}\right); \\ c &= \frac{4\sqrt{h}}{\lambda\theta}\gamma(1-\beta^2) - \frac{4\sqrt{h}}{\theta}\left(m+m'+\frac{\mu}{\delta^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Si avverta che in queste ultime due formole H rappresenta l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua nella canna, nell' istante nel quale si chiude l' animella di fermata e si apre quella di salita; quindi $H = v$, essendo v l' altezza che trovasi nelle qui riferite formole (18), (10). Trovati i valori di t, t', Q, Q', si avrà quello della quantità d' acqua perduta, e quello della innalzata da questo Ariete, conformemente a quanto si è detto al § 191.

§ 195. Corollario I. Se l' Ariete non ricevesse l' acqua da una conserva ma da un fosso d' acqua corrente (§ 112, Parte I), allora

converrebbe, nelle formole trovate, sostituire per V l'altezza dovuta alla velocità di quell' acqua corrente.

§ 196. Scolio I. Nell'Ariete da noi considerato qui sopra, non eravi la campana ove sta racchiusa l'aria della quale si è parlato ai §§ 72 e 73. Questa in fatti non è necessaria in una tal macchina, il cui oggetto si è d'innalzare dell'acqua ad un'altezza maggiore del livello da cui ess'acqua discende. L'aria, come abbiamo detto (§§ 113, 114, 115), serve a rendere perenne il getto dell'acqua, il quale senza di lei sarebbe intermittente, come in fatti è negli Arieti lavorati nel modo da noi supposto. In questi dal supremo livello oo trabocca (F. 8.) pel beccuccio P l'acqua che dal foro p sbocca nel vaso M': e quello sgorgo di acqua continua in tutto il tempo t', cioè finchè continua il fluire dell'acqua nel detto vaso M': per tutto poi quell'intervallo di tempo t, nel quale sta chiusa l'animella della salita, dall'alto del vaso non trabocca più acqua.

§ 197. Fatto l'Ariete con la campana (§ 72), l'aria fa in guisa che quell'acqua la quale per entrare nella campana ha impiegato il tempo t', per traboccare dal beccuccio P impieghi la somma $t'+t$ di quei due tempi.

Dunque noi supporremo che la quantità di aria contenuta nella campana nulla abbia che fare con la quantità deil' acqua che dall'apertura p sgorga nella campana e col tempo nel quale dura questo sgorgo. In questa guisa la campana ripiena di acqua e d'aria farà le veci di quel vaso M', e l'altezza dell'acqua in questo caso equivarrà all'altezza della sommità del cannello O, innestato alla campana al di sopra del foro p (F. 3, Tav. II.).

Le formole allora riportate nei §§ antecedenti saranno buone pel caso attuale.

§ 198. Scolio II. Io ho detto che l'aria contenuta nella campana nulla fa per la quantità dell'acqua che, in ogni colpo d'Ariete, entro vi sbocca dall'apertura p dell'animella della salita. Ora questa proposizione non è rigorosamente vera, ed ognuno comprende che, rispetto alla resistenza che incontrar debbe l'acqua ad entrare

nella campana, allorchè si apre l'animella della salita, è diverso il caso nel quale la campana sia ripiena di fluido incompressibile, da quello in cui siavi anche una di lei porzione occupata da un fluido elastico e quindi capace a lasciarsi comprimere. Io non intraprendo a trattare del moto dell'acqua mentre entra nella campana contenente dell'aria, perchè tal problema conduce a due equazioni differenziali tra due incognite, l'integrazione delle quali supera le attuali forze dell'analisi (*Vedasi l'Appendice*).

§ 199. Problema II. *In un dato Ariete che debba innalzar l'acqua ad una determinata altezza, si dimanda quale esser debba la velocità dell'acqua o l'altezza a lei dovuta nell'istante in cui si chiude l'animella di fermata, onde la quantità di acqua innalzata dalla macchina in un tempo assegnato sia la massima.*

Soluzione. Supponendo l'Ariete costrutto come si disse al § 194, il problema non ha altra difficoltà che da parte dell'analisi. La quantità di acqua innalzata in un determinato tempo è rappresentata dalla formola $\frac{T}{t+t'}Q'$, nella quale t, t', Q' sono quantità funzioni dell'altezza v dovuta a quella velocità e delle dimensioni dell'Ariete.

Or dunque, giusta la regola dei massimi e minimi, altro non si dovrà fare che differenziare la quantità $\frac{T}{t+t'}Q'$ riguardo alla variabile v, ed eguagliarne a zero la differenziale divisa per dv; in questa guisa s'otterrà un'equazione la quale ci darà il valore di quell'altezza v. Il valore di t ha la forma

$t = m \cdot log\,(M\sqrt{v}+N) - m \cdot log\,(L\sqrt{v}+K)$;

egualmente t' e Q' hanno queste forme

$t' = m' \cdot log\,(M'\sqrt{v}+N') - m' \cdot log\,(L'\sqrt{v}+K')$:

$Q' = B \cdot log\,(D\sqrt{v}+E) - B' \cdot log\,(D'\sqrt{v}+E')$.

Dovremo dunque differenziare rapporto a v la funzione

$$\frac{B \cdot log\,(D\sqrt{v}+E) - B' \cdot log\,(D'\sqrt{v}+E')}{m \cdot log(M\sqrt{v}+N) - m \cdot log(L\sqrt{v}+K) + m'\left\{\cdot log\,(M'\sqrt{v}+N') - log(L'\sqrt{v}+K')\right\}},$$

dividerla per dv ed eguagliarla in seguito a zero. Facilissima è quest' operazione, ma l' equazione cui conduce è tale che la variabile v si trova sotto aspetto algebraico e trascendente, e quindi l' equazione non è risolubile; così l' imperfezione dell' analisi rende incompleta la dottrina dell' Ariete per questo verso.

§ 200. Questa stessa difficoltà analitica s' incontra in molti altri problemi che si potrebbero proporre nella dottrina dell' Ariete idraulico. *Così, essendo data la quantità di acqua che in un determinato tempo* T *si può somministrare ad un Ariete, se si dimandasse quale esser debbe la velocità dell' acqua nel condotto al momento che si chiude l' animella della fermata, onde di quell' acqua data una porzione appunto se ne perdesse, l' altra essendo innalzata della macchina*, si giungerebbe ad un' equazione nella quale la variabile è sotto i segni logaritmici.

Infatti se indichiamo con C la quantità d' acqua data, della quale dispor possiamo nel tempo determinato T, il valore ricercato di v sarà somministrato da quest' operazione:

$$\frac{T}{t+t'}\, Q + \frac{T}{t+t'}\, Q' = C\,,$$

nella quale per t, t', Q, Q' debbono mettersi le ritrovate espressioni date per mezzo di v.

Determinato poi il valore di v, si potrebbe dimandare quale esser debbe la lunghezza del condotto dell' Ariete, onde l' acqua innalzata in quel dato tempo T fosse massima; ma a simile ricerche s' oppongono le mentovate difficoltà.

§ 201. Scolio. I valori di t, Q, t', Q' si possono anche esprimere per serie, e se queste saranno convergenti, allora si potranno, almeno per approssimazione, sciogliere i sopr' indicati problemi dei massimi e dei minimi dell' Ariete.

Così rappresentando con
$t = A'\sqrt{v} + A''(\sqrt{v})^2 + A'''(\sqrt{v})^3 +$ ecc. la serie che abbiamo trovata (§ 125) per esprimere il valore di t, si avrà (§ 131)

$$Q = \frac{2a'\sqrt{h}}{6} \left\{ \tfrac{1}{2} A' (\sqrt{v})^2 + \tfrac{2}{3} A'' (\sqrt{v})^3 + \tfrac{3}{5} A''' (\sqrt{v})^4 + \text{ecc.} \right.$$

Il valore di t' è eguale a quello di t preso negativamente, cioè a

$$t' = -\left\{ A'\sqrt{v} + A''(\sqrt{v})^2 + A'''(\sqrt{v})^3 + \text{ecc.} \right\},$$

e quello di Q' è quello di Q preso negativamente,

$$Q' = -\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta} \left\{ \tfrac{1}{2} A'(\sqrt{v})^2 + \tfrac{2}{3} A''(\sqrt{v})^3 + \text{ecc.} \right\};$$

e non avvi altra differenza, oltre il segno, se non che le quantità a, b, c, α, che entrano a comporre i coefficienti delle serie di t e di Q, sono quelle contrassegnate da (E) nel § 194, e le quantità dinotate dalle stesse lettere a, b, c, α, che entrano a comporre coefficienti delle serie di t' e di Q', sono quelle contrassegnate, nello stesso §, da (F).

Onde poi scansar confusione indichiamo per B', B'', B''' quei coefficienti di t' e Q'; avremo allora

$$t' = -\left\{ B'\sqrt{v} + B''(\sqrt{v})^2 + B'''(\sqrt{v})^3 + \text{ecc.} \right\},$$

$$Q' = -\frac{2a'\sqrt{h}}{\theta} \left\{ \tfrac{1}{2} B'(\sqrt{v})^2 + \tfrac{2}{3} B'(\sqrt{v})^3 + \tfrac{3}{4} B''(\sqrt{v})^4 + \text{ecc.} \right\}.$$

Ora ritenendo in queste serie (allorchè saranno convergenti) soltanto i primi due termini di ciascuna, dovremo (per risolvere il problema II del § 199) eguagliare a zero il differenziale di $\frac{+B'\sqrt{v} + \frac{1}{2}B''(\sqrt{v})^2}{B' - A' + (B'' - A'')\sqrt{v}}$ preso a riguardo di $\sqrt{v}$, e diviso per $d\sqrt{v}$.

Quest' operazione ci dà, per determinare $\sqrt{v}$, l' equazione

$$(a) \ldots \tfrac{1}{2}B'(B' - A') + 2 \cdot \tfrac{2}{3}B''(B' - A')\sqrt{v} + \tfrac{2}{3}B''(B'' - A'')(\sqrt{v})^2 = 0$$

che è un' equazione algebraica del secondo grado.

E qui pongo fine alla teorica geometrica dell' Ariete.

FINE DELLA SECONDA PARTE.

PARTE TERZA.

CONFRONTO DELLE TEORICHE CON LE SPERIENZE.

CAPO PRIMO.

DETERMINAZIONE DELLE QUANTITA' CHE SI PRENDONO PER DATE NELLA TEORICA GEOMETRICA DELL' ARIETE.

§ 202. Le soluzioni dei Problemi componenti la Teorica geometrica dell' Ariete poco o nulla lasciano a desiderare se si riguardano come risultamenti di analisi; esse in fatti o contengono le formole di ciò che si cerca; o sono spinte tanto innanzi, quanto a noi permettono le attuali forze dell' algebra; ma per fare uso di quei risultamenti è necessario, assegnando i valori numerici a tutte le quantità le quali, come *dati*, si ritrovano nei Problemi, è necessario, io dico, ridurre in fine tutti questi risultamenti in numeri. Ora di quelle quantità alcune si hanno per mezzo dell' effettiva misurazione delle parti della macchina, e le altre debbono esserci somministrate dalle sperienze. In questo capitolo, m' ingegnerò di assegnare i su mentovati valori più esattamente che potrò.

§ 203. L' unità di misura delle linee, delle superficie, dei solidi saranno *il metro, il metro quadrato, il metro cubo*. Quella dei pesi sarà il *chilogrammo*, e la gravità specifica dell' acqua la esprimerò per 1000, essendo questo il numero dei chilogrammi che pesa un metro cubo di acqua nel vôto (*). Avendo adunque (§ 119) rappresentata questa gravità specifica con D, sarà $D = 1000$.

(*) Un metro cubo di acqua distillata alla temperatura di 10 gradi di *Réaumur* pesa nel vôto chilogrammi 999,616; ed un metro cubo di acqua di pozzo pesa nelle stesse circostanze chilogrammi 1000,149: perciò io presi il numero rotondo 1000.

L' unità del tempo sarà per noi il minuto secondo sessagesimale; e siccome le sperienze hanno mostrato che un grave, scendendo liberamente dalla quiete, percorre in un secondo uno spazio di metri 4,9044; così per quell' altezza la quale noi abbiamo indicata (§ 119) con h, prenderemo 4,9044, e sarà quindi $h = 4{,}9044$, e $\sqrt{h} = 2{,}215$. Sarà poi $\theta = 1''$, avendo ivi rappresentato con θ quel tempo che un grave, impiega a percorrere un primo spazio h cadendo liberamente.

§ 204. Ammettendo che l' urto dei fluidi segua la legge della ragione dei quadrati delle velocità, noi abbiamo espresso quest' urto (§ 119) con $Da' \times \frac{4h}{\theta^2}(\sqrt{V} - \sqrt{v})^2$ ȣ, ove ȣ è un coefficiente costante ed indeterminato, al quale conviene assegnare il valore. Tralasciando quel coefficiente ȣ, la formola dell'urto è $Da' \times \frac{4h}{\theta}(\sqrt{V} - \sqrt{v})$, la quale ci significa che quell' urto è uguale alla densità moltiplicata nella superficie urtata, e nel quadrato della velocità relativa con cui si fa la percossa. Questa misura dell' urto si baratta, come è noto, in quest' altra, nel peso, cioè, di un prisma dello stesso fluido, avente per base il piano direttamente percosso, e per altezza il doppio di quella che è dovuta alla velocità relativa, con cui si fa l' urto. Tale è la Teorica del *Neutono*.

Ora alcuni celebri autori riducono alla metà questa misura della resistenza o sia dell' urto diretto dei fluidi; quindi, per accomodare la nostra formola al giudizio di questi, converrebbe far ȣ $= \frac{1}{2}$. Le sperienze poi hanno talvolta confermata la prima, talvolta la seconda sentenza, e talvolta niuna delle due; ma però i risultamenti sono sempre stati tra mezzo a quelle due misure dell' urto dei fluidi.

§ 205. Il signore *Zuliani*, professore a Padova, nel tomo terzo dell' accademia di quella città, ha registrate alcune importantissime sperienze che gran luce arrecano a questa dottrina. Egli ha mostrato che le varietà, cui soggiace la misura assoluta dell' urto diretto dei fluidi, dipendono dalla proporzione che l' ampiezza della

lastra percossa ha con la sezione del getto urtante. Se la lastra sopravanza notabilmente la sezione del getto, la sua resistenza eguaglia il peso d'un cilindro aqueo, avente per base quella sezione, e per l'altezza il doppio dell'altezza dovuta alla velocità con la quale si fa l'urto, come appunto prescrive la regola del *Neutono*; ma se la lastra è più angusta, l'urto è minore; e quando eguaglia o di pochissimo eccede la sezione del getto, l'urto non equivale più che ad un cilindro della stessa base di quella sezione, e dell'altezza dovuta alla velocità. Tra questi due limiti in conseguenza è contenuta la misura dell'urto in tutti i casi.

Nella prima delle dissertazioni idrauliche del padre *Bartolommeo Ferrari*, date in luce nel 1793 a Milano, si dimostra la medesima cosa; ed il nostro professore *Venturoli*, nell'egregio suo corso d'elementi d'idraulica, ha provato come i fenomeni osservati dal signor *Zuliani* pienamente concordano con i risultamenti dell'elegante teoria proposta dal signor *Lagrange* (1) per valutare questo genere di resistenza; io pertanto ad essi pienamente mi appoggio nel determinare quel valore di s.

Ora nel nostro caso l'ampiezza della lastra o superficie urtata è per l'appunto eguale a quella del getto urtante, nè può immaginarsi un caso ove più esattamente succeda questa eguaglianza; quindi io suppongo $s = \frac{1}{2}$.

§ 206. Abbiamo (§ 119) con la lettera V (F. 1.) indicata *l'altezza dovuta alla velocità con la quale l'acqua sgorgherebbe da* CD *se la lunga cannella non ci fosse.* Ora io intendo di parlare di quella velocità con la quale l'acqua sgorgherebbe dalla vasca, se il foro *CD* armato fosse di un corto cannello cilindrico, ma però tale che l'acqua potesse sgorgare da esso a bocca piena: ecco come si ha l'altezza dovuta a siffatta velocità.

Le concordi esperienze dei signori *Bossut* e *Michelotti* (2) hanno mostrato che la portata effettiva di un cannello cilindrico *addizionale* sta alla portata dataci dalla teorica (la quale non considera

(1) Memorie dell'accademia di Torino del 1784 e 1785.

(2) *Bossut*, Idrodinamica; *Michelotti*, Sperimenti idraulici.

l'aggiunta di quel cannello) come 13:16. Bisogna dunque che la velocità dell'efflusso per quel cannello sia $\frac{13}{16}$ della velocità con la quale l'acqua, giusta la Teorica, sgorgherebbe dall'orifizio, se quel cannello *addizionale* non ci fosse.

Ma supponendo che quel foro CD sia tanto depresso sotto il livello dell'acqua nel vaso, che la velocità dell'acqua in tutti i di lui punti sia a presso a poco la medesima, ed indicando con s l'ampiezza della superficie AB, con a' l'ampiezza della sezione della bocca, con A l'altezza dell'acqua nel vaso sopra il centro del detto foro CD, si dimostra, in Idraulica, che l'altezza dovuta alla velocità con la quale l'acqua ha da uscire dal foro CD nell'aria, è rappresentata da $\frac{A}{1-\frac{a'^2}{s^2}}$; dunque questa stessa velocità sarà rappresentata da $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{\frac{A}{1-\frac{a'^2}{s^2}}}$; e la velocità con la quale l'acqua uscirà da quel corto cannello addizionale sarà rappresentata da $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{\left(\frac{13}{16}\right)^2\frac{A}{1-\frac{a'^2}{s^2}}} = \frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{A}{1-\frac{a'^2}{s^2}}}$ prossimamente.

Dovremo dunque fare $V=\frac{2}{3}\cdot\frac{A}{1-\frac{a'^2}{s^2}}$.

Se il foro CD sarà piccolissimo in confronto dell'ampiezza del recipiente, allora si trascurerà la frazione $\frac{a'^2}{s^2}$, e sarà $V=\frac{2}{3}A$, cioè eguale a due terzi dell'altezza dell'acqua nel vaso.

Se poi la conserva fosse armata di un cannello conico, prossimamente eguale alla figura della vena ristretta, al quale cannello conico innestata fosse la nostra cannella cilindrica, allora si farebbe V eguale all'intiera altezza A; avvertendo però che per l'area dello sbocco dell'acqua del vaso debbe prendersi quella della bocca del cannello conico.

§ 207. Veniamo a determinare alcune quantità che si riferiscono alla lunga canna *CDEF* annessa alla vasca. Primieramente nel prendere la di lei lunghezza, che da noi fu (§ 119) indicata per λ, conviene considerare questa canna come più corta di due dei suoi diametri, essendo questi la lunghezza del cannello addizionale, che noi riguardiamo come stabilmente unito alla vasca; e quando la vasca sarà armata di quel cannello conico, del quale si è qui sopra parlato, allora la totale lunghezza del condotto dovrà diminuirsi della lunghezza di questo cannello addizionale.

Indaghiamo ora i coefficienti della resistenza che incontra l' acqua a correre nei lunghi cannelli.

Riguardo a questa resistenza abbiamo tutta la ragione per congetturare che crescerà col crescere della lunghezza del cannello, col crescere del perimetro del cannello soggetto a sfregamento, col crescere della pressione dell' acqua sulle pareti del cannello, e col crescere della velocità. Le riflessioni che possono farsi sopra il moto dell' acqua nei cannelli, forniscono queste relazioni; ma non ci è dato determinare *a priori* le precise regole che esse debbono seguire.

Abbandonata questa via, i Fisici ed i Geometri si sono rivolti alle ipotesi ed al cimento di queste con le sperienze; ma si può dire liberamente che poco cammino abbian fatto verso verità.

§ 208. Seguendo l' analogia delle leggi dell' attrito fra solidi e solidi, suppose *Eulero* che l' attrito dell'acqua, contro le scabrosità di un letto in cui corra, sia indipendente dalla velocità, e proporzionale piuttosto alla pressione; nei cannelli poi di diverso diametro, pensò quel Geometra che la resistenza dovesse farsi tanto maggiore, quanto maggiore era il perimetro soggetto a sfregamento, e quanto minore era l' area della sezione.

Dicasi D' il rapporto dell' area al perimetro soggetto a sfregamento, rapporto cui si suol dare il nome di *raggio medio*; sarà secondo *Eulero* (*) la resistenza proporzionale direttamente alla pressione ed inversamente al raggio medio. Questo raggio medio nei cannelli cilindrici è la quarta parte del diametro.

(*) Nov. commen. petrop., tom. VI.

§ 209. Non furono soddisfatti i Geometri dell' ipotesi d' *Eulero*, e *Du-Buat* ve ne sostituì un' altra nella quale la resistenza è proporzionale al quadrato della velocità; ma ancor questa ebbe lo stesso successo dell' *euleriana*; e *Coulomb* e *Prony* (1) stabilirono che questa resistenza sofferta dall' acqua nello scorrere nei lunghi cannelli doveva esser composta di due termini, proporzionale uno alla seconda, l' altro alla prima potenza della velocità; e *Prony* con esperienze cercò di assegnare il valore ai coefficienti costanti che incontransi in siffatta espressione della celerità. L' insigne Geometra professore *Venturoli* di Bologna ha adottata quest' ipotesi; ma però non concorda col celebre *Prony* nella determinazione dei coefficienti costanti, e ciò perchè l' equazione, dalla quale il francese Geometra fa che questi dipendano, è diversa da quella che usa a tal uopo l' italiano (2).

§ 210. In tale frangente diffidando io di tutto quanto si è detto sopra questo proposito, ho procurato di soddisfare in qualche modo al mio bisogno, cimentando le sperienze fatte da *Bossut* sopra l' acqua che sgorga dai cannelli, con i principj da me adottati nella Teorica geometrica dell' Ariete.

Per partire poi da qualche ipotesi, ho stimato la resistenza come composta di tre termini; uno proporzionale alla seconda, uno alla prima potenza della velocità, ed uno da essa indipendente. Dovrà l' esperienza dirmi quale di questi escluder si debba; così indicando per u la velocità con la quale l' acqua corre nella mia canna, ho rappresentata la resistenza con la formola mu^2+nu+g ove m, n, g sono i coefficienti costanti dei quali trovar si debbe il valore.

L' equazione (4) del § 124

$$\frac{4h\gamma}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-\frac{4h}{\theta^2}mv-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}n\sqrt{v}-g=0$$

è destinata a dare il valore dell' altezza v dovuta alla velocità u,

(1) *Recherches sur la theorie des eaux courantes, art.* 135.

(2) Ricerche sulle resistenze che ritardano le acque correnti ecc. (Modena 1807).

con cui l'acqua corre nella canna a getto invariabile. Introduciamo in vece dell'altezza la stessa velocità, e l'equazione diverrà

$$\frac{\vartheta}{\lambda}\left(\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{V}-u\right)^2-mu^2-nu-g=0.$$

§ 211. A tenore di quanto fu detto (§ 205) dobbiam prendere $\vartheta=\frac{1}{2}$; e per λ la lunghezza della canna diminuita di quella del cannello addizionale (§ 207).

Sia rappresentata da A l'altezza dell'acqua nella conserva, ed avremo (§ 206) $V=\frac{2}{3}A$; chiamiamo C la celerità che si debbe all'altezza $\frac{2}{3}A$; sarà

$\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{V}=\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{\frac{2}{3}A}=C$, onde l'equazione riportata alla fine del § antecedente diverrà $mu^2+nu+g=\frac{(C-u)^2}{2\lambda}$,

ovvero $mu+n+\frac{g}{u}=\frac{(C-u)^2}{2\lambda u}$.

Qui prenderò per unità di lunghezza il pollice, onde accomodarmi alle sperienze del citato Geometra *Bossut*.

TAVOLA I *Tratta dall' Idrodinamica di* BOSSUT. Tom. II, 135.					TAVOLA II *Ricavata dalla prima.*				
Num. delle sperienze.	Altezza dell' acqua nella vasca al di sopra dell'asse del cannello orizzontale.	Lunghezza del cannello.	Acqua sgorgata dal cannello di diametro 1,333. Pollici cubici in un minuto primo.	Acqua sgorgata dal cannello di diametro 2,01. Pollici cubici in un minuto primo.	Num. delle sperienze.	Velocità dell'acqua nel cannello che ha 0,3333 di raggio medio.	Velocità dell'acqua nel cannello che ha 0,5025 di raggio medio.	Valore di $\frac{(C-u)^2}{2\lambda u}$ nel cannello che ha 1,333 di diametro.	Valore di $\frac{(C-u)}{2\lambda u}$ nel cannello che ha 2,01 di diametro.
1	12	360	2778	7680	1	33,55	40,32	0,072	0,045
2	12	720	1957	5564	2	23,63	29,21	0,080	0,050
3	12	1080	1587	4534	3	19,16	23,81	0,078	0,053
4	12	1440	1351	3944	4	16,31	20,71	0,076	0,052
5	12	1800	1178	3486	5	14,22	18,30	0,076	0,051
6	12	2160	1052	3119	6	12,70	16,38	0,074	0,051
7	24	360	4066	11219	7	49,10	58,90	0,098	0,058
8	24	720	2888	8190	8	34,87	43,00	0,106	0,066
9	24	1080	2352	6812	9	28,40	35,76	0,101	0,066
10	24	1440	2011	5885	10	24,28	30,90	0,099	0,066
11	24	1800	1762	5232	11	21,20	27,47	0,098	0,065
12	24	2160	1583	4710	12	19,11	24,73	0,094	0,065

L' area del cerchio, il cui diametro è 1,333, è 1,38; quella, il cui diametro è 2,01, è 3,17.

Il valore della celerità rappresentata da C per l' altezza di 12 pollici, è 76,2; quello per l' altezza 24, cioè, la velocità dovuta all' altezza di 16 pollici, è 107,7. L' unità poi di tempo, con la quale si valutano le velocità di questa tavola, è il minuto secondo.

§ 212. Se esaminiamo i valori di $\frac{(C-u)^2}{2\lambda u}$ si vedrà che appresso a poco non variano col solo variare della velocità u e della lunghezza del cannello; che ragguagliatamente pel cannello, il cui raggio medio è 0,3333, e l' altezza dell' acqua nella vasca, 12 pollici, si ha $\frac{(C-u)^2}{2\lambda u} = 0{,}076$;

E pel cannello, il cui raggio medio è 0,5025, essendo parimente 12 pollici l' altezza dell' acqua, si ha $\frac{(C-u)^2}{2\lambda u} = 0{,}050$;

Pel cannello, il cui raggio medio è 0,3333, e l' altezza dell' acqua 24 pollici, si ha $\frac{(C-u)^2}{2\lambda u} = 0{,}099$;

E per l' altro cannello, il cui raggio medio è 0,5025, e l' altezza dell' acqua 24 pollici, si ha $\frac{(C-u)^2}{2\lambda u} = 0{,}065$.

Indichiamo generalmente questi valori per N, ed avremo l' equazione $mu + n + \frac{g}{u} = N$.

Ora, il secondo membro di quest' equazione non variando col variare la velocità u, ne dedurremo che nel primo termine dovranno svanire quei termini, dove questa velocità s' incontra; resterà dunque solamente $n = N$. Intanto dalla sperienza si ricava che si debbe ridurre a nu la formola della resistenza d' attrito $mu^2 + nu + g$, ed in conseguenza doversi fare questa resistenza proporzionale alla semplice velocità.

§ 213. Ma questo valore di n è diverso a misura che diversa è l' altezza dell' acqua nella conserva ed il raggio medio del cannello. Cerchiamo di scoprire qual relazione il coefficiente n abbia con siffatte quantità.

Quando la differenza consiste nel solo raggio medio, e l' altezza dell' acqua nella vasca è 12 pollici, si ha

Pel raggio medio 0,3333 . . . . . . $n = 0{,}076$,

Pel raggio medio 0,5025 . . . . . . $n = 0{,}050$.

Ora se questi valori di n si moltiplicano pel rispettivo raggio medio, si hanno per prodotti i due numeri 0,0253; 0,0251, i quali sono prossimamente eguali.

La stessa cosa avviene quando l' altezza dell' acqua nella vasca è 24 pollici: in fatti si ha allora

Pel raggio medio 0,3333 . . . . . . $n = 0,099$,

Pel raggio medio 0,5025 . . . . $n = 0,065$;

ed i dne valori di n moltiplicati pei rispettivi raggi medj danno 0,0329; 0,0327, numeri prossimamente eguali.

Concluderemo adunque che, qualunqne sia la lunghezza e la grossezza del cannello, se per D' rappresentiamo il raggio medio, sarà, per una stessa altezza di acqua nella conserva, nD' una quantità costante. Questa quantità, quando l' altezza è di 12 pollici, si è trovata 0,0252; e quando l'altezza è 24, ella si è trovata 0,0328. Dunque conoscendo il coefficiente n per una data altezza e per un dato raggio medio del cannello, si potrà trovare questo coefficiente per qualunque altro cannello di diverso raggio medio; dunque in generale il coefficiente n, per una data altezza di acqua, seguirà la ragione inversa del raggio medio D'.

§ 214. Esaminiamo ora come il coefficiente n dipenda dall' altezza dell' acqua. Posto il raggio medio 0,3333, si ha

Per l' altezza di 12 pollici . . . . . $n = 0,076$,

Per l' altezza di 24 pollici . . . . . $n = 0.909$;

Ora 0,076 : 0,099 :: 1 : 1,3;

Egualmente posto il raggio medio 0,5025, si ha

Per l' altezza di 12 pollici . . . . . $n = 0,050$,

Per l' altezza di 24 pollici . . . . . $n = 0,065$;

e questi due valori di n sono ancora essi nello stesso rapporto 1 : 1,3,

Il rapporto delle radici delle altezze 12 e 24 è quello di 1 ; 1,4 che non molto differisce da quello di 1 : 1,3; dunque stabiliremo che il coefficiente n segue prossimamente la ragion diretta delle radici dell' altezza dell' acqua nella conserva. Combinando ora questo risultato con quello del § antecedente, concluderemo che:

Qualunque sia la lunghezza del cannello, il coefficiente n *della formola* nu *della resistenza starà in ragion diretta della radice dell' altezza dell' acqua nella conserva, ed in ragione inversa del raggio medio.*

Ciò posto, darò ad n questa forma $n = \frac{pA^{\frac{1}{2}}}{D'}$, indicando per A l' altezza dell' acqua nella conserva. Troviamo ora il valor di p. Siccome, fatto $A = 24$; $D' = 0,5025$, si ha $n = 0,065$, così avremo $0,065 = \frac{p \cdot \sqrt{24}}{0,5025}$; quindi $p = \frac{0,065 \cdot 0,5025}{\sqrt{24}} = 0,0134 \cdot 0,5025$, $p = 0,0067$.

Se per determinare n si fossero presi gli sperimenti in cui l' altezza è 12 pollici, ed il raggio medio 0,3333, avremmo trovato $p = 0,0072$.

Io dunque darò a p il valore medio $p = 0,0069$; avremo dunque in generale $n = 0,0069 \frac{\sqrt{A}}{D'}$, e la formola della resistenza sarà $nu = 0,0069 \frac{\sqrt{A}}{D'}$.

§ 215. Il professore *Venturoli*, di sopra citato, ha fatte alcune sperienze sul corso dell' acqua nei cannelli, e con queste cimenterò la mia formola

(E) . . . . $0,0069 \frac{\sqrt{A}}{D'} = \frac{(C-u)^2}{2\lambda u}$, nella quale rammento che C è la velocità dovuta a $\frac{2}{3} A$; λ la lunghezza del cannello diminuita di due diametri; A l' altezza dell' acqua nella vasca; e D' il raggio medio del cannello.

Diamo all' equazione (E) la forma $n = \frac{(m-u)^2}{u}$, ed avremo $u = \frac{2m+n \pm \sqrt{(4mn+n^2)}}{2}$.

ESPERIENZE DEL PROFESSORE VENTUROLI.

Il diametro del cannello è 1,108 pollici; quindi 0,277 è il raggio medio.

Numero delle sperienze.	Lunghezza del cannello.	Altezza dell' acqua nella vasca.	Velocità della sperienza.	Velocità calcolata con la formola (E).
I	240	28,5	56,69	57,16
II	360	37,75	56,69	56,49
III	300	32,00	56,69	55,99

A me sembra che la corrispondenza tra i risultamenti della formola (E) e quelli delle sperienze sia tale quale può desiderarsi, almeno finchè la Fisica idraulica non ci somministra dati più precisi per calcolare la resistenza d' attrito che l' acqua incontra a scorrere nei lunghi cannelli.

§ 216. Si ha dunque $n = 0{,}0069 \frac{VA}{D'}$ preso per unità il pollice.

Prendendo per unità il metro, sarà $n = 0{,}001135 \frac{VA}{D'}$, ed in questa medesima ipotesi l' equazione (E) del § antecedente diverrà $0{,}001135 \frac{VA}{D'} = \frac{(C-u)^2}{2\lambda u}$; questa è l' equazione (4) del § 124, allorchè in vece delle altezze pongonsi le velocità ad esse dovute.

C sta in vece di $\frac{2\sqrt{hV}}{\theta}$; ed u in vece di $\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$.

§ 217. Premesse tutte queste cose, se rappresentiamo con A l'altezza dell'acqua nella vasca, e con λ la lunghezza totale del condotto che debbe diminuirsi della lunghezza del cannello addizionale conico unito alla vasca, o di due diametri del condotto medesimo, giusta il detto ai §§ 206 e 207, i valori di a, b, c del § 121, che abbiamo riferiti al § 191, saranno

$$a = \frac{4\cdot\sqrt{4{,}9044}}{2\lambda} V;\ b = -\frac{8\cdot\sqrt{4{,}9044}}{2\lambda}\sqrt{V} - 2\cdot 0{,}001135\frac{\sqrt{A}}{D'};\ c = \frac{4\cdot\sqrt{4{,}9044}}{2\lambda};$$

ove $V = A$ ovvero $= \frac{2}{3} A$, secondo che il foro nella parete della vasca è, o non è armato del cannello conico.

Ma $\sqrt{4{,}9044} = 2{,}2146$; dunque

$$a = 4{,}4292 \frac{V}{\lambda};$$

$$b = -\left\{ 8{,}8584 \frac{\sqrt{V}}{\lambda} + 0{,}00227 \frac{\sqrt{A}}{D'} \right\};$$

$$c = 4{,}4292 \frac{1}{\lambda}.$$

Non avrà ora più difficoltà il maneggio delle formole appartenenti al Problema I del capo I.

Egualmente non ne avranno quelle appartenenti al Problema II. In esse trovasi di più la lettera a', che esprime l'area della sezione del condotto normale all'asse, e si ha sempre

$$a' = \frac{355}{113}\ 4\ D'^2 = \frac{355}{113}\ (2\ D')^2.$$

§ 218. Nei Problemi III e IV non si ritrovano altre quantità, che quelle del Problema I e del II.

Nel Problema V abbiamo rappresentata per $\frac{4h}{\theta^2} m'v + \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n'\sqrt{v} + g'$ la resistenza che al moto dell'acqua nel condotto arreca un orlo o telajo di cui sia guarnita la di lui bocca. Conviene adunque determinare i coefficienti m', n', g' che a siffatta resistenza appartengono. Ma ci mancano intieramente gli sperimenti necessarj a tale

uopo; quindi spero che con indulgenza sarà ricevuta quella, qualunque siasi, determinazione che noi potremo ricavare dai ragionamenti.

Al § 155 abbiamo dimostrato che, indicando per α' l'area della bocca libera del condotto, per β' quella della bocca ristretta, sarà $(\alpha' - \beta') DW(A + \lambda - l)$ lo sforzo sopra un punto fisico delle pareti, posto questo punto alla distanza l dallo sbocco suddetto. W vi rappresenta la velocità che ha l'acqua nel condotto, D la gravità specifica dell'acqua, A l'altezza dell'acqua nella vasca, e λ la lunghezza totale del condotto medesimo.

Un eguale sforzo si farà su di ciascuna molecula di acqua situata in quella sottilissima falda della colonna fluida distante della quantità l dallo sbocco.

Questa espressione di un tale sforzo, scritta secondo le denominazioni del Problema V del capo I, cioè introducendo, in vece della velocità, l'altezza che a lei è dovuta, e supponendo che $\beta : 1$ sia il rapporto dell'area della bocca libera all'area della bocca ristretta, è $\alpha'\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\frac{2\sqrt{h}}{\theta} D \cdot \sqrt{v}\left\{A + \lambda - l\right\}$, la quale divisa per la gravità specifica della molecula acquea, si riduce ad $\alpha'\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v} \cdot (A + \lambda - l)$; e questa sarà l'espressione della forza ritardatrice che opera sopra una molecula acquea situata alla distanza l della bocca del tubo, per ritardare il moto di cui si parla nell'indicato Problema.

Siccome poi questa forza di resistenza è composta di due termini $\alpha'\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v} \times A + \alpha'\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v} \cdot (\lambda - l)$, dei quali il secondo segue la ragione diretta delle distanze dalla bocca del condotto; così, per avere una forza ritardatrice costante riguardo alla distanza dallo sbocco, noi, in vece di quel secondo termine, prenderemo quello che conviene alla forza ritardatrice delle molecule acquee poste alla metà della lunghezza del condotto;

rappresenteremo adunque per $a'\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v}\cdot\left(A+\frac{\lambda}{2}\right)$ la forza ritardatrice da cui ogni molecula acquea scorrente nel cannello con la velocità $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v}$ trovasi impedita, in virtù di quell' ostacolo collocato allo sbocco del fluido.

Avremo dunque $m'=0$, $g'=0$, e $n'=a'\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(A+\frac{\lambda}{2}\right)$.

I valori pertanto di a, b, c del Problema V e del § 138, che sono quegli indicati per (E) nel § 194, saranno

$$a = 4,4292\cdot\frac{V}{\lambda};$$

$$b = -\left\{8,8584\cdot\frac{VV}{\lambda}+0,00227\,\frac{VA}{D'}+2a'\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(A+\frac{\lambda}{2}\right)\right\};$$

$$c = 4,4292\,\frac{1}{\lambda};$$

e questi valori diverranno quantità numeriche sostituendovi i valori numerici di A, λ, D', a', dati dalla effettiva misurazione delle parti della macchina; il valore poi di a' è $a'=\frac{355}{113}(2D')^2$.

§ 219. L' equazione riportata al § 140 è quella che ci somministra l' altezza dovuta alla velocità che l' acqua ha nel condotto a getto invariabile pel caso contemplato nel Problema V. Se in questa equazione s' introducono i valori delle quantità da noi determinate, e si adatta la stessa equazione a somministrarci la velocità in vece dell' altezza dovuta, otterremo

$$(F)\ldots 0,001135\,\frac{VA}{D'}+\frac{355}{113}(2D')^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(A+\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{(C-u)^2}{2\lambda u}.$$

§ 220. Da quest' ultima equazione dedurremo la velocità, e quindi l' altezza V', che s' incontra come *dato* nel Problema I del capo II. L' altezza V, altro *dato* di questo Problema, è A, ovvero $\frac{2}{3}A$; e l' altezza H è quella dovuta alla velocità u, somministrataci dall' equazione (§ 216) $0,001135\,\frac{VA}{D'}=\frac{(C-u)^2}{2\lambda u}$.

Le quantità poi a, b, c di questo Problema, sono le stesse che quelle da noi determinate al § 218.

§ 221. I *dati* del Problema I del capo III sono quasi tutti gli stessi di quelli de' Problemi dei capi precedenti. Se l'altezza dell' acqua nel secondo vaso M' è A', a me sembra che debba farsi $V' = A'$, perchè la velocità *virtuale* con la quale l' acqua del vaso M' tende a scappare dal foro p, e quindi si oppone all' ingresso dell' acqua che viene dal condotto, è quella dovuta all' altezza A'; del resto in questo Problema si ha

$$a = 4,4292\,(V - A');$$

$$b = -\left\{ 8,8584\,\frac{VV + VA'}{\lambda} + 0,00227\,\frac{VA}{D'} + 0,00227\,\frac{VA}{\delta D''} \right\};$$

$$c = o.$$

Essendo D'' il raggio medio del vaso cilindrico M'; queste quantità a, b, c sono quelle riferite al § 192. L'aver poi trovato $c = o$, ci fa conoscere che la soluzione di questo Problema è appunto nelle circostanze considerate al § 164, e che quindi adoprar si debbono le formole di quel §.

§ 222. I *dati* del Problema II del capo III sono tutti calcolati pei Problemi precedenti, ed i valori delle lettere a, b, c, le quali sono indicate da (F) nel § 194, sono

$$a = 4,4292\,(V - A')\,\frac{1}{\lambda};$$

$$b = -\left\{ 8,8584\,\frac{(VV + \beta VA')}{\lambda} + 0,00227\left(\frac{1}{D'} + \frac{1}{\delta D''}\right)VA + 2a'\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(A + \frac{\lambda}{2}\right) \right\};$$

$$c = 4,4292\,(1 - \beta^2) : \lambda;$$

e qui ripeto che i valori i quali restano a sostituirsi, sono quei che s' ottengono dall' effettiva misurazione della macchina.

CAPO II.

COMPUTO NUMERICO DELL' ARIETE IDRAULICO.

§ 223. Supponiamo l'Ariete come è detto al § 194, e procuriamo di ridurre a numeri la valutazione geometrica degli effetti di questa macchina, onde poscia si possano confrontare i di lei risultamenti con gli sperimenti.

Sia $A = 1{,}172$ l'altezza dell'acqua nella conserva che somministra acqua all'Ariete;

$D' = 0{,}025$ il raggio medio del condotto;

$\lambda = 11{,}614$ la di lui lunghezza totale; sia 0,14 la lunghezza del tubo addizionale conico; sarà $a' = \frac{355}{113}(0{,}05)^2 = 0{,}00785$ l'area d'una sezione del condotto normale all'asse, cioè l'area della bocca stessa se fosse intieramente aperta. Sia 0,00113 metri quadrati il ristringimento della bocca, o l'area dell'orlo o telajo che vi è applicato: sarà allora 0,00672 l'area della porzione libera della bocca. Ora $\beta : 1$ esprime il rapporto dell'area dell'intiera bocca all'area della bocca ristretta; dunque
$\beta : 1 :: 0{,}00785 : 0{,}00672$, e quindi $\beta = 1{,}168$.

Al citato § 194 abbiamo trovato

$$t = \frac{1}{c\alpha} \cdot \log \frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(b-2c\alpha)};$$

$$Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\theta\alpha c^2} \left\{ (b+2c\alpha) \cdot \log \frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b+2c\alpha} - (b-2c\alpha) \cdot \log \frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b-2c\alpha} \right\},$$

essendo (§ 218)

$$a = 4{,}4292 \frac{A}{\lambda - 0{,}14};$$

$$b = -\left\{ 8{,}8584 \frac{\sqrt{A}}{\lambda - 0{,}14} + 0{,}00227 \frac{\sqrt{A}}{D'} + 2a'\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(A + \frac{\lambda}{2}\right) \right\};$$

$$c = 4{,}4292 \frac{1}{\lambda - 0{,}14};$$

$$\alpha^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4c^2}.$$

I logaritmi che si ritrovano in questi valori di t e di Q, sono logaritmi iperbolici; se noi vorremo cangiarli in logaritmi ordinarj, converrà moltiplicarli per 2,302585; fatta ora questa moltiplicazione e qualche riduzione, si avrà

$$t = \frac{2,302585}{c\alpha} \left\{ log\left(1 + \frac{2c}{b-2c\alpha}\sqrt{v}\right) - log\left(1 + \frac{2c}{b+2c\alpha}\sqrt{v}\right) \right\};$$

$$Q = \frac{a'\sqrt{h} \times 2,302585}{6\alpha c^2} \left\{ (b+2c\alpha) log\left(1 + \frac{2c}{b+2c\alpha}\sqrt{v}\right) - (b-2c\alpha) log\left(1 + \frac{2c}{b-2c\alpha}\sqrt{v}\right) \right\};$$

ora non ci resta a fare altro che a porre nei valori di a, b, c i dati del problema: e ciò effettuando, si avrà

$$t = 10,20425 \left\{ log(1 - 0,551001\sqrt{v}) - log(1 - 1,54853\sqrt{v}) \right\};$$

$$Q = 0,45955 \left\{ 1,401161\, log(1 - 0,551001\sqrt{v}) - 0,498563\, log(1 - 1,54853\sqrt{v}) \right\};$$

ove v rappresenta l' altezza dovuta alla velocità che ha l' acqua nel condotto al momento che chiudesi l' animella della fermata; t esprime il tempo che l' acqua ha impiegato ad acquistare quella velocità, e Q la quantità di acqua sgorgata in questo tempo, da noi chiamata acqua perduta.

§ 224. Troviamo adesso il tempo in cui l' acqua, passando dall' animella della salita, entra nel vaso M' dell' Ariete, e la quantità di quest' acqua: abbiamo indicate queste due quantità per t' e Q'; se nelle formole che ne esprimono i valori, si cangiano i logaritmi iperbolici in logaritmi ordinarj, e si fanno alcune altre riduzioni che a colpo di occhio si riconoscono, si avrà

$$t' = \frac{2,302585}{c\alpha} \left\{ log\left(1 + \frac{2c}{b+2c\alpha}\sqrt{v}\right) - log\left(1 + \frac{2c}{b-2c\alpha}\sqrt{v}\right) \right\};$$

$$Q' = \frac{a'\sqrt{h} \cdot 2,302585}{6\alpha c^2} \left\{ -(b+2c\alpha) log\left(1 + \frac{2c}{b+2c\alpha}\sqrt{v}\right) + (b-2c\alpha) log\left(1 + \frac{2c}{b-2c\alpha}\sqrt{v}\right) \right\}.$$

I valori delle lettere a, b, c, che s' incontrano in queste formole, sono quei trovati al § 222, nei quali in vece di V por si debbe A, come richiede il caso attuale, ed in vece di λ por si debbe $\lambda = 0,14$.

Trascuriamo la resistenza cagionata all' acqua dalle pareti del vaso M', e più semplici allora si ridurranno quei valori, e saranno

$$a = \quad 4,4292 \cdot \frac{A-A'}{\lambda-0,14};$$

$$b = -\left\{8,8584 \cdot \frac{\sqrt{A}+\beta\sqrt{A'}}{\lambda-0,14} + 0,00227\frac{\sqrt{A}}{D'} + 2a'\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(A+\frac{\lambda}{2}\right)\right\};$$

$$c = \quad 4,4292\ \frac{1-\beta^2}{\lambda-0,14};$$

sia $A' = 7,860$ l'altezza cui dall' Ariete spingesi l' acqua.

Sia $\beta : 1$, come si suppose, il rapporto dell' area della sezione del condotto, all' area del foro p dell' animella della salita, e sia $\beta = 2,053$.

Con questi dati e quei del § antecedente calcolando i valori di a, b, c ecc., sostituendoli nelle formole di t' e Q', e facendo le opportune riduzioni si avrà

$$t' = 1,12641\left\{log\,(1+1,84431\sqrt{v}) - log\,(1+0,26073\sqrt{v})\right\};$$

$$Q' = 0,0157734\left\{9,522977\,log(1+0,26073\sqrt{v}) - 1,346257\,log\,(1+1,84431\sqrt{v})\right\};$$

e questi sono i valori del tempo nel qnale l' acqua continua a passare dall' animella della salita, e della quantità di acqua che vi passa in detto tempo, e trabocca dall' altezza $A' = 7,860$ metri.

§ 225. Conviene adunque che sia data la velocità che ha l' acqua nel condotto, al momento nel quale chiudesi l' animella di fermata, onde siano pienamente conosciuti i valori di t, Q, t' e Q'.

Supponiamo che l' animella della fermata si chiuda allorchè l' acqua nel condotto dell' Ariete ha acquistata la massima velocità, cioè a dire, quando il getto è invariabile: allora questa velocità, che io indicherò per u, è data dall' equazione (F) del § 219, la quale, adattata al nostro caso, è

$$0,001135\frac{\sqrt{A}}{D'} + \frac{355}{133}(2D')^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(A+\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{(C-u)^2}{2(\lambda-0,14)u};$$

ove C rappresenta la velocità dovuta ad A, per il che si ha

$C = \frac{2\sqrt{h}\cdot\sqrt{A}}{\theta} = 4,79497$. I valori, poi, di β e delle altre quantità, che si trovano nella suddetta equazione sono quei trovati qui sopra al § 223.

Fatte ora le opportune sostituzioni e riduzioni nell' equazione medesima, avremo $1,30871 = \frac{(4,79497-u)^2}{u}$; dalla quale ricaveremo (§ 216) $u = 2,86022$.

Trovata la velocità u, si avrà il valore di $\sqrt{v}$, cioè della radice dell' altezza a lei dovuta, e questo sarà $\sqrt{v} = 0,645768$.

§ 226. Sostituiamo questo valore di $\sqrt{v}$ nelle formole dei valori di t, Q, t', Q', ridotte nei §§ 223 e 224, e troveremo
$t = 50,65290$; $Q = 1,058080$;
$t' = 0,307579$; $Q' = 0,00291769$; cioè a dire: supponendo che l' animella della fermata si chiuda allorchè l' acqua nel condotto ha acquistata la massima velocità, ovvero (ciò che è lo stesso) quando il getto della bocca del condotto è divenuto invariabile, il tempo per cui l' animella della fermata starà aperta e l' acqua sgorgherà dal condotto, sarà 50,6529 secondi; l' acqua perduta in tal tempo sarà 1,058080 metri cubici; il tempo pel quale l' acqua entrerà nella campana, passando per l' apertura di salita, sarà 0,307579 secondi; e la quantità di acqua che in detto tempo vi passerà, che è l' acqua innalzata, sarà 0,00291769 metri cubici.

Sarà poi, in quest' ipotesi, $t + t' = 50,960479$ la durata di un colpo di Ariete;

$\frac{3600}{t+t'} = 70,643$ il numero dei colpi che l' Ariete farà in un' ora:

$\frac{3600}{t+t'}\cdot Q = 74,7461$ l' acqua perduta dall' Ariete in un' ora;

$\frac{3600}{t+t'}\cdot Q' = 0,206114$ l' acqua innalzata dalla macchina parimente in un' ora.

§ 227. Perchè si prenda una più distinta idea del computo degli effetti dell' Ariete idraulico, io ho calcolato due tavole che pongo

alla fine di questo capo, le quali ci mostrano come facil cosa sarebbe il calcolarne delle altre, per altre circostanze della macchina diverse dalle nostre.

Supponendo che l' animella di fermata si chiuda, quando l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua nel condotto è un decimo di quella 0,645768, ovvero due decimi, tre decimi ecc., si hanno diverse misure della durata di un colpo di Ariete, e delle quantità dell' acqua perduta ed innalzata. Questi risultamenti disposti per ordine compongono la tavola I.

La tavola II contiene dieci risultamenti per dieci casi simili a quelli della tavola I, se non che l' altezza cui l' acqua si suppone innalzarsi al di sopra dell' animella di salita, è 10,956 metri, mentre nei primi era 7,860.

Del resto queste due tavole sono tutte appoggiate alle medesime supposizioni, eccettuata quella che si riferisce all' altezza cui debbe spingersi l' acqua, e che dà (§ 224) il valore di A'. Trattenendosi ad esaminare queste tavole, si vedrà come i risultamenti della Teorica geometrica dell' Ariete, confermano pienamente quei della Teorica fisica. Così, per esempio, si vede che quanto maggiore è la velocità dell' acqua nel condotto al chiudimento dell' animella di fermata, tanto maggiore è l' acqua che s' innalza in un colpo di Ariete; ma, per un altro canto, maggiore è la durata di questo colpo; di maniera che, considerando l'acqua che s'innalza in un' ora, dal crescere quella velocità si ha un vantaggio ed uno scapito; nello stesso modo le tavole ci dichiarano che, nei nostri casi, il massimo effetto corrisponde alla velocità che è circa i tre quinti della massima.

Se si costruissero tavole per diverse lunghezze di condotto, e per diverse animelle della salita, e per diverse altezze di acqua nella vasca, potrebbero farsi altri confronti, e si troverebbero sempre tra loro conformi i risultamenti della Teorica geometrica, con quei della fisica.

TAVOLA I. *Altezza a cui sale l' acqua al di sopra dell' animella della salita* = 7,86.0
al di sopra del livello della vasca = 6,688.

I N.° dei risultati.	II Radici dell' altezza della velocità al chiudersi l' animella della fermata.	III Tempo impiegato ad acquistarla.	IV Acqua perduta.	V Tempo pel quale sta aperta l' animella di salita.	VI Acqua innalzata.	VII Durata di un colpo d' Ariete.	VIII Numero dei colpi in un' ora.	IX Acqua perduta in un' ora.	X Acqua innalzata in un' ora.
1	0,0645768	0,30636	0,00035201	0,046878	0,000051481	0,353238	10191,430	3,58754	0,524668
2	2.0,0645768	0,66173	0,00155925	0,088317	0,000190117	0,750047	4799,700	7,48395	0,912505
3	3.0,0645768	1,08038	0,00392272	0,125341	0,000397190	1,205721	2985,770	11,71230	1,185950
4	4.0,0645768	1,58337	0,00789370	0,158708	0,000658777	1,742078	2066,500	16,31230	1,361360
5	5.0,0645768	2,20357	0,01418630	0,189003	0.000964325	2,392573	1504,660	21,34560	1,450980
6	6.0,0645768	2,99636	0,02401610	0,216683	0,001305720	3,213043	1120,430	26,90850	1,462980
7	7.0,0645768	4,06608	0,03969460	0,242111	0,001676490	4,308191	835,618	33,16950	1,400900
8	0.0,0645768	5,64778	0,06646340	0,265582	0,002080930	5,913362	608,791	40,46230	1,266850
9	9.0,0645768	8,49330	0,12116400	0,287346	0,002486220	8,780646	409,993	49,67630	1,019334
10	0,6457680	50,65290	1,05808000	0,307579	0,002917690	50,960479	70,643	74.74610	0,206114

TAVOLA II. *Altezza a cui si porta l' acqua al di sopra dell' animella della salita* = 10,956.
al di sopra del livello della vasca = 9,784.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
11	0,0645768	0,30636	0,00035201	0,0324796	0,000035825	0,338840	10624,500	3,74000	0,380619
12	2.0,0645768	0,66173	0,00155925	0,0619012	0,000134380	0,723631	4974,910	7,75715	0,668528
13	3.0,0645768	1,08038	0,00392272	0,0887327	0,000284563	1,169113	3079,260	12,07910	0,876242
14	4.0,0645768	1,58337	0,00789370	0,1133460	0,000477585	1,696716	2121,740	16,74840	1,013314
15	5.0,0645768	2,20357	0,01418630	0,1360380	0,000706479	2,339608	1538,720	21,82880	1,087070
16	6.0,0645768	2,99636	0,02401610	0,1570500	0,000965757	3,153410	1141,620	27,41730	1,102530
17	7.0,0645768	4,06608	0,03969460	0,1765860	0,001250560	4,242666	848,523	33,68180	1,061130
18	8.0,0645768	5,64778	0,06646340	0,1948100	0,001557250	5,842590	616,165	40,95240	0,959523
19	9.0,0645768	8,49330	0,12116400	0,2118660	0,001882530	8,705166	413,547	50,10700	0,778514
20	0,64576800	50,65290	1,05808000	0,2278740	0,002223750	50,880774	70,754	74,86320	0,157338

CAPO III.

SPERIMENTI.

§ 228. L'Ariete idraulico, col quale ho fatto gli sperimenti, è quello da me dichiarato nel capo V della prima parte di questo Trattato. Io ne rammenterò qui le misure.

L' altezza dell' acqua nella conserva sul centro del foro cui è unito il condotto, è metri 1,172; il diametro del condotto orizzontale 0,100; e la lunghezza 11,614; ma si può questa anche scorciare e ridurre a 7,936 ed anche a 4,218. La lunghezza del cannone conico, di cui è guarnito quel foro, è 0,14. Il diametro maggiore di questo cannone, cioè il diametro del foro fatto nella parete della vasca, è 0,128; il minor diametro è eguale a quello del condotto cioè 0,100.

L' area della sezione del condotto, fatta a squadra con l' asse, è 0,00785.

L' area dell' apertura rettangola da cui sgorga l' acqua quando l' animella di fermata sta aperta, è 0,00672. L' altezza della campana a conoide è 0,384; il diametro della sua base è 0,290; la porzione della canna che sta entro la campana ha di diametro 0,033, ed è di lunghezza 0,310. L' aria che resta rinchiusa sotto la campana, è quella che nel suo stato naturale occuperebbe lo spazio di 0,015010 metri cubici.

Il diametro della canna per cui sale l' acqua, è 0,028.

Si è spinta l' acqua a queste quattro altezze al di sopra del livello dell' acqua della vasca, cioè a metri 2,87; 6,052; 9,148; 12,258.

Per trovare la misura dell' area dell' apertura dell' animella della salita, io ho misurato il diametro del foro circolare che dall' animella della salita viene a chiudersi; ed il diametro dell' asse di bronzo che tiene in guida l' animella, il quale passando pel centro di quel foro ne diminuisce la grandezza; da queste due misure ricavata ho l' area dell' armilla, dalla quale l' acqua sgorga nella campana.

da superare la forza della molla la quale impediva il chiudimento dell' animella.

Di due animelle abbiamo fatto uso; una aveva l' area di quell' armilla = 0,003823; e l' altra = 0,00145; così l' area del condotto stava all' area di quell' armilla della prima animella come 2,053:1.

La ventola poi sopra la quale urtava l' acqua sgorgante dal condotto, per chiudere l' animella della fermata, poteva avvicinarsi e scostarsi dalla bocca del condotto, non oltrepassando però la distanza di 0,200.

Ma perchè meglio possa comprendersi ciò che si riferisce al chiudimento dell' animella della fermata, io rammenterò che l' asse, sul quale è imperniata quest' animella, traversa una parete laterale della camera di bronzo, e sopra questa parete trovasi una molla la quale, se si vuole, lavora per far girare quell' asse, e così mantenere aperta l' animella, come si è anche detto al § 93.

A questa molla possono darsi diverse tensioni, ed allora ci vorranno diverse forze per chiudere l' animella della fermata, e queste dovranno esser tanto maggiori, quanto maggiore sarà la tensione della molla. Nelle sperienze ho messe in opera due diverse tensioni; l' una è detta *tensione di due gradi*, l' altra *tensione di tre gradi*; la seconda è assai maggior della prima, ma non è nella ragione di tre a due.

Quel bottone, il quale, saldato alla faccia interna dell' animella di fermata, impediva (come si è detto al citato § 93) che la molla potesse accostare l' animella della fermata alla parete superiore della camera, era stato tolto; così l' animella si avvicinava più a quella parete superiore quando la molla aveva la maggior tensione, di quello che si avvicinasse quando aveva la minore. Se io dava maggior tensione alla molla, l' animella s' accostava intieramente a detta parete.

Talvolta anche metteva in opera la molla per quanto fosse pure in opera la ventola: allora non bastava che l' acqua urtasse sopra la ventola perchè seguisse il chiudimento dell' animella della fermata; ma ci voleva di più che quest' urto fosse così gagliardo

§ 229. In un luogo opportuno, ove l' acqua scorrendo in una gora di mulino, rimaneva più alta due metri circa dal piano di campagna, abbiamo fatti gli sperimenti. L' acqua dalla gora facilmente poteva voltarsi ad una vasca inferiore di livello. Un' antenna, piantata nel terreno accanto alla campagna, era il sostegno cui io raccomandava il cannello pel quale l' acqua doveva ascendere. Su quest' antenna erano confitti alcuni piuoli, per mezzo dei quali un uomo poteva salire fino alla sommità dell' antenna medesima a ricevere l' acqua che sgorgava dall' alto del cannello. La figura indica come precisamente si faceva questa operazione.

Tutto disposto, si dava il segno dell' attenzione allo sperimento. Allora un ajutante vegliava a mantenere allo stesso livello l' acqua della conserva: un altro a contare il tempo con un pendolino a mezzi secondi: un terzo a ricevere l' acqua che sgorgava dall' apertura dell' animella di fermata, ed un quarto a raccorre l' acqua che sgorgava dall' alto. Io vegliava sopra tutti e stava alla campana per aprire a mano l' animella della fermata, e dar principio allo sperimento, pronunziando un monosillabo di convenzione. Continuavo l' esperimento per 10 ovvero 15 ed anche 20 colpi di Ariete, al terminar del quale pronunziavo lo stesso monosillabo, e quindi badando io medesimo alle misure dell' acqua perduta ed innalzata, registrava in uno scartafaccio i risultati, e lo stesso faceva l' ajutante che misurava il tempo.

Molto ci volle prima ohe gli esperimenti riuscissero di quella esattezza che poteva contentarmi. Conveniva rendere istruttissimi gli ajutanti in quel maneggio; conveniva scoprire tutti gli accidenti, che potevano avvenire e disturbare le sperienze; quindi è che molti e molti sperimenti i quali a bella prima mi parevano buoni, poi mi divennero sospetti, e li dovei rigettare.

Primieramente osservai che dopo circa cento colpi di Ariete cominciava il getto dall' alto a farsi più copioso per alcuni momenti, quindi sbruffava una gran quantità d' aria ed acqua, e dopo questo sbruffo si trovava votato di acqua il cannello per cui essa ascendeva. Egualmente si vedevano spesso uscire dall' alto alcune bolle di aria mescolate con l' acqua.

Sospettai allora che ciò nascesse dall' aria contennta nella campana, ed avendo per questo fatti alcuni esperimenti senza l' aria nella campana, mi accorsi che, dopo qualche tempo, era la campana nuovamente ripiena di questo fluido: congetturai adunque che ad ogni colpo di Ariete, dall' acqua che entrava nella campana, si conducesse una quantità di aria la quale andasse a nascondersi nella campana medesima. Così essendo, dovea dunque riempiersi a poco a poco di aria la campana che ne era stata votata; e quando l' aria già vi preesisteva, ad ogni colpo di Ariete dovea questa aumentarsi. Ora dunque anmentando continuamente la mole dell' aria nella campana, è giocoforza che si deprima e si abbassi il livello dell' acqua nella campana medesima; ed allorchè questo livello si sarà abbassato appena appena al di sotto dell' imboccatura del cannello per cui sale l' acqua, dovrà l' aria scappare in alto, e con violenza trasportare avanti a sè tutta l' acqua che riempiva il mentovato cannello. Ho poi riconosciuto ad evidenza, per mezzo di un Ariete più piccolo, al quale avea fatto fare la campana di cristallo, questo successivo ingresso dell' aria nella campana ad ogni colpo di Ariete; ed ecco una delle cagioni che, in principio non iscoperta, rese fallaci alcuni esperimenti.

Un' altra causa di fallacia fu la seguente. Quando l' animella della fermata si apriva, ed in conseguenza quando cadeva quel braccetto di ferro cui era raccomandata la ventola a causa dell' elasticità delle parti, cominciava questo braccetto ad oscillare, ed in queste oscillazioni l' animella della fermata era talvolta investita dall' acqua dalla parte di dietro, ed obbligata per ciò a chiudersi, prima anche che l' acqua avesse percossa la ventola; di modo, che restando tutte le altre circostanze eguali in uno stesso esperimento, alcuni colpi riuscivano ora di maggiore, ora di minor durata, e quindi raramente confrontavano tra loro i risultati di due eguali esperimenti.

§ 230. Pei qui sopra descritti motivi (che io ho riferiti a lume di chi vorrà ritentare simili esperienze) e per altre cagioni di minor rilievo, mi determinai a rigettare una gran quantità di esperienze che per siffatte ragioni io giudicava non esatte.

Ripreso adunque con maggior cura il modo di sperimentare, io faceva esattamente osservare quando dall' alto il getto dell' acqua dava indizio di farsi più copioso, o quando comparivano bolle di aria mescolate con l' acqua: questi essendo contrassegni certi di un vicino sbruffo, ed allora io non continuava l' esperimento; e per rimediare a quell' altro sconcerto, io procurava di togliere con la mano l' ondulazione del manico dell' animella, ed in questa guisa di accostarla dolcemente all' alto della camera.

Ripeteva più volte ed in diversi giorni lo stesso esperimento nelle stesse circostanze, e non lo reputava buono se i diversi risultamenti erano tra loro discordi, la qual discordanza io scopriva sempre dipendere da qualche trascuratezza o accidente estrinseco alla macchina.

Ad evitare poi una disgrazia che in principio mi accadde, io mi accorsi esser necessario di fare nel condotto, presso alla sua innestatura con la vasca, un foro che io chiamo sfiatatojo. Questo debbe lasciarsi aperto, allorchè, terminati gli esperimenti e chiuso il passaggio dell' acqua dalla vasca nel condotto, si apre l' animella di fermata per votar di acqua il condotto medesimo; allora, se non fosse aperto lo sfiatatojo, si farebbe un vôto nella parte del condotto verso la vasca, per causa del quale la pressione dell' atmosfera va a rischio di schiacciare il condotto medesimo; e questo successe appunto a me. Rammenterò in fine che è necessaria all' artefice la massima diligenza onde l' animella della salita, la campana ed il cannello verticale siano a perfettissima tenuta d' aria e di acqua. Non è lo stesso per la costruzione del condotto della camera e dell' animella della fermata. Un leggero difetto in quelle prime parti rende assolutamente la macchina incapace di alzar l' acqua; mentre essa continua a lavorare sufficientemente bene ancorchè dal condotto, dalla camera o dall' animella della fermata trapeli dell' acqua.

§ 231. Con siffatte precauzioni ho ottenuti i risultamenti disposti nelle tavole III e IV le quali si trovano alla fine di questo capo. Onde potere più facilmente indicare gli esperimenti, gli ho

contrassegnati con numeri, e questi si trovano nella prima colonna di quelle tavole. La seconda colonna contiene i mezzi secondi che è durato l'esperimento di 10 colpi d'Ariete. La terza contiene l'altezza cui l'acqua è salita al di sopra dell'animella della salita. Volendo le altezze al di sopra del livello dell'acqua nella conserva, conviene dai numeri di quella colonna sottrarre 1,172.

Per le altre colonne basta ciò che si trova scritto nel loro capo.

Le circostanze poi comuni ad un certo numero di esperimenti, sono scritte alla testa degli esperimenti medesimi.

§ 232. Oltre i mentovati esperimenti, abbiamo fatto il seguente.

Lasciata libera l'uscita dell'acqua per la bocca del condotto col tenere l'animella della fermata intieramente aperta, ed accostata alla parete superiore della camera, e rimossa la ventola, e data al condotto la lunghezza di metri 11,614, si è procurato di misurare meglio che si è potuto,

1.° Il tempo che per quello sbocco impiega il getto a divenire invariabile;

2.° La quantità di acqua sgorgata in detto tempo;

3.° L'ascissa verticale del getto dell'acqua;

4.° L'ordinata orizzontale o l'amplitudine del getto corrispondente a quell'ascissa.

Dopo ripetute sperienze, i risultamenti delle quali a presso a poco tra loro non differivano, ho ritrovato che

1.° Il tempo era 9 mezzi secondi;

2.° L'acqua sgorgata era metri cubici 0,0684724;

3.° L'ascissa verticale 0,667;

4.° L'amplitudine o sia ordinata orizzontale 1,190.

Per far questo esperimento conveniva avere una grandissima attenzione nella misura del tempo e dell'acqua sgorgata; mantenendosi l'acqua a costante livello nella vasca, non era difficile segnare, su di un piano orizzontale preparato, quel punto nel quale cadeva l'asse del getto invariabile, giacchè quest'operazione si poteva fare con comodo; segnato quel punto, la grandezza delle due coordinate dell'asse del getto si otteneva facilmente. Dopo questo bisognava

ricominciare l'esperimento da capo, dando con molta cura il segnale dell' istante nel quale si apriva l' animella di fermata ed incominciava lo sgorgo, e di quello nel quale il getto giungeva a cadere su quel punto della tavola orizzontale contrasseguato in principio, onde colui che era destinato alla misura de tempo, potesse osservare quanti mezzi secondi correvano tra que' due istanti.

Siccome non aveva opportuno macchinamento onde misurare l'acqua sgorgata nello stesso mentre nel quale si misurava il tempo; così mi era necessario ripetere l'esperienza, facendo che si aprisse la bocca del condotto, ed incominciasse il fluire dell' acqua allorchè il contatore dei mezzi secondi dava il segnale, e terminasse il detto sgorgo quando il medesimo contatore dava un altro segnale; correvaci poi tra quei due segnali tanto tempo, appunto, quanto si era precedentemente trovato che ce ne voleva perchè il getto divenisse invariabile. Si raccoglieva l' acqua uscita dal condotto in tal tempo, e questa era l' acqua perduta.

TAVOLA III. SPERIENZE.

10 sono i colpi dell' Ariete in ciascuna sperienza.

Numero delle sperienze.	Tempo in mezzi secondi.	Salita dell' acqua.	Acqua innalzata.	Acqua perduta.	Colpi in un' ora.	Acqua innalzata in un' ora.	Acqua perduta in un' ora.
		Metri.	Metri cubici.	Metri cubici.		Metri cubici.	Metri cubici.
Lunghezza del condotto = 11,614; Tensione della molla = 2 gradi; Distanza della ventola = 0; Area dell'animella della salita = 0,00145.							
1	52	13,430	0,00538850	0,10955592	1384,61	0,7461000	15,1697355
2	44	10,956	0,00669755	0,09281821	1636,36	1,0959627	15,1884344
3	41	7,860	0,00920937	0,08825338	1756,09	1,6172552	15,4981545
4	38	4,678	0,01336853	0,07912372	1894,74	2,5329846	14,9918627
Lunghezza del condotto = 7,936; Tensione della molla = 2 gradi; Distanza della ventola = 0; Area dell'animella della salita = 0,00145.							
5	35	13,430	0,00234528	0,06314681	2057,14	0,4824576	12,9902010
6	34	10,956	0,00373407	0,06390761	2117,65	0,7907379	13,5333762
7	32	7,860	0,00544167	0,06086440	2250,00	1,2243690	13,6944900
8	28	4,678	0,00845829	0,05325635	2571,43	2,1749888	13,6944900
Lunghezza del condotto = 4,218; Tensione della molla = 2 gradi; Distanza della ventola = 0; Area dell'animella della salita = 0,00145.							
9	23	13,430	0,00092995	0,04260508	3130,44	0,2911148	13,3724240
10	21	10,956	0,00152161	0,04108347	3428,57	0,5216948	14,0857189
11	21	7,860	0,00226557	0,04108347	3428,57	0,7767670	14,0857189
12	20	4,678	0,00413259	0,03956186	3600,00	1,4877324	14,2422696
Lunghezza del condotto = 11,614; Tensione della molla = 3 gradi; Distanza della ventola = 0,200; Area dell'animella della salita = 0,00145.							
13	56,6	13,430	0,00528222	0,13998812	1272,08	0,6719431	17,807676
14	55	10,956	0,00779404	0,14607456	1309,09	1,0203107	19,122488
15	55	7,860	0,01097011	0,15216100	1309,09	1,4360871	19,919258
16	54	4,678	0,01649146	0,15520422	1349,49	2,1988613	20,693896
Lunghezza del condotto = 11,614; Tensione della molla = 3 gradi; Distanza della ventola = 0,100; Area dell'animella della salita = 0,00145.							
17	48,3	13,430	0,00410602	0,09433982	1490,68	0,61207751	14,0630787
18	47,3	10,956	0,00622929	0,09890465	1522,20	0,94822173	15,0552533
19	45	7,860	0,00942193	0,09890465	1600,00	1,50750900	15,8247440
20	44	4,042	0,01419932	0,10042626	1636,36	2,32352510	16,4333880

TAVOLA IV. SPERIENZE.

10 sono i colpi dell' Ariete.
Area dell' animella della salita = 0,003823.

Numero delle sperienze.	Tempo in mezzi secondi	Salita dell' acqua.	Acqua innalzata.	Acqua perduta.	Numero dei colpi in un' ora.	Acqua innalzata in un' ora.	Acqua perduta in un' ora.
		Metri.	Metri cubici.	Metri cubici.		Metri cubici.	Metri cubici.
Lunghezza del condotto = 11,614; Tensione della molla = 2 gradi; Distanza della ventola = 0.							
21	36	13,430	0,00410602	0,06695084	2000,00	0,8212040	13,390168
22	35	10,956	0,00586676	0,06695084	2057,14	1,2068763	13,772744
23	33	7,860	0,00821916	0,06086440	2181,80	1,7932712	13,279505
24	32	4,678	0,01243858	0,05477796	2250,00	2,7986805	12,325041
Lunghezza del condotto = 11,614; Tensione della molla = 0; Distanza della ventola = 0,100.							
25	42	10,956	0,00530879	0,07760211	1714,09	0,9100783	13,303219
26	40	7,860	0,00816602	0,07608050	1800,00	1,4698836	13,694490
27	36	4,678	0,01176721	0,06999406	2000,00	2,3534420	13,998812
Lunghezza del condotto = 11,614; Tensione della molla = 0; Distanza della ventola = 0,200.							
28	50	10,956	0,00693668	. . . .	1440,00	0,99888192	. . . . . .
29	47	7,860	0,00944850	0,10955592	1531,92	1,44742900	18,783034
30	45	4,678	0,01403990	0,10651270	1600,00	2,24638400	17,042035
Lunghezza del condotto = 11,614; Tensione della molla = 3 gradi; Distanza della ventola = 0,100.							
31	43,3	13,430	0,00562763	0,09890465	1662,82	0,9357220	16.446004
32	43	7,860	0,01168750	0,10042626	1674.42	1,9569767	16,815559
33	42,3	4,042	0,01622576	0,09586143	1702,13	2,7618316	16,316839
Lungh. del condotto = 11,614; Tensione della molla = 3 gr.; Dist. della ventola = 0,200.							
34	51,6	13,430	0,00816602	0,14911778	1395,35	1,13944460	20,807132
35	50,6	7,860	0,01411961	0,14911778	1422,92	2,00911440	21,218340
36	50,0	4,042	0,02015291	0,14607456	1440,00	2,90201904	21,034737

CAPO IV.

PARAGONE TRA I RISULTAMENTI DELLE TEORICHE, E QUELLI DELLE SPERIENZE.

§ 233. Se con qualche mezzo si potesse misurare la velocità che l'acqua ha nel condotto nell'istante in cui chiudesi l'animella della fermata, allora con questo *dato*, facendo uso delle formole da noi riferite nel capo II, si potrebbe ritrovare la durata di un colpo di Ariete, le quantità di acqua innalzata e perduta in questo colpo, e confrontare questi risultamenti con quelli della sperienza; ma la misura di quella celerità è oltremodo difficile, per non dire impossibile; quindi per altra via conviene tentare il desiderato confronto.

L'Ariete del quale noi abbiamo fatto il computo numerico nel capo II, differisce da quello col quale abbiamo fatti gli esperimenti soltanto nella forma del vaso per cui l'acqua sale. In tutte le altre parti le dimensioni assegnate all'Ariete ipotetico sono esattamente quelle che ha la nostra macchina.

Nell'Ariete ipotetico si suppone che l'animella della salita metta foce in un vaso cilindrico verticale, il quale si estenda sino alla sommità cui l'acqua ascende. Nella nostra avvi quella campana ove è racchiusa l'aria; e siccome quest'aria (allorchè lavora la macchina) è condensata tanto da fare equilibrio alla colonna dell'acqua contenuta nel cannello ascendente; perciò l'animella della salita soffre la medesima pressione come se, in vece di quell'aria e di quella campana, vi fosse un vaso di acqua alto sino alla sommità da cui sgorga l'acqua innalzata.

Io per questo supporrò che la diversa costruzione della macchina non possa fare alterazione nei risultamenti dell'esperienza (*).

Le tavole poste alla fine del capo II sono calcolate senza che noi abbiamo tenuto conto della resistenza che l'acqua soffre da

(*) Vedasi l'Appendice.

parte delle pareti del vaso per cui s' innalza: questa circostanza ha luogo appunto nella nostra macchina, imperciocchè nel tempo che l' acqua entra nella campana (il quale come vedremo è piccolissimo, non giungendo mai a far un mezzo secondo), pochissima acqua sbocca dall' alto, tutta nascondendosi nella campana, in quello spazio che l' aria a lei cede col ristringersi.

Premesse tutte queste cose, ecco come noi faremo questi primi confronti tra le Teoriche e le Sperienze.

Gli esperimenti 22, 23, 25, 26, 28, 29, 32 e 35 della tavola IV sono i soli che possano essere confrontati con i risultamenti delle tavole I e II, essendo questi esperimenti fatti con quelle circostanze nelle quali è calcolata quella tavola: per confrontare gli altri farebbe di mestieri la costruzione di altre tavole. Ecco in questa i citati esperimenti, ridotti ad un solo colpo di Ariete, e misurato il tempo in secondi.

Numero degli esperimenti.	Durata di un colpo in secondi.	Altezza cui è salita l' acqua.	Acqua innalzata.	Acqua perduta.
23	1,65	7,860	0,000821916	0,006086440
26	2,00	7,860	0,000816602	0,007608050
29	2,35	7,860	0,000944850	0,010955590
32	2,15	7,860	0,001168750	0,010042626
35	2,53	7,860	0,001411961	0,014911778
22	1,75	10,956	0,000586670	0,006695080
25	2,10	10,956	0,000530879	0,007760211
28	2,50	10,956	0,000693669	. . . .

Ora la prima idea che mi è venuta, è stata quella di ricercare nella colonna VII della tavola I e II i tempi dati dalle sperienze per la durata di un colpo d' Ariete, e vedere se combinano le quantità dell' acqua innalzata e perduta date dalle sperienze medesime, con quelle risultanti dalla Teorica.

Nell' esperimento 23 il tempo di un colpo d' Ariete è 1,65; nella tavola I trovo alla colonna VII, 1,74 tempo, poco maggiore di quello della sperienza. Ora la corrispondente quantità d' acqua innalzata, computata in questo caso per mezzo delle formole, è metri cubici 0,00065877, minore, cioè, di quella data dall' esperienza; mentre essendo di maggior durata il colpo, pare che essa dovrebbe essere un poco maggiore. Egualmente l' acqua perduta è calcolata metri cubi 0,0078937, maggiore, cioè, di quella data dall' esperienza; e questo sarebbe conforme alla maggior durata del colpo. Nello stesso modo si possono confrontare tutti gli altri esperimenti, e le quantità date dall' esperienza si trovano ora maggiori ora minori di quelle date dalla Teorica, per quanto non molto si allontanino.

Nell' esperimento 29 la durata di un colpo è 2,35″; l' acqua innalzata è metri cubici 0,00094485, e la perduta 0,01095559: nella tavola I alla durata 2,39″ corrisponde l' acqua innalzata metri cubici 0,000964325, e la perduta 0,0141863; nell' esperimento 28 la durata è 2,5″, e l' acqua innalzata è metri cubici 0,000693669. Ora nella tavola II alla durata 2,3396″ corrisponde l' acqua innalzata metri cubici 0,000706479; così questi due esperimenti combinano sufficientemente con la Teorica.

Ma questo modo di fare i confronti non è esatto, imperciocchè la durata di un colpo d' Ariete essendo la somma di due tempi, di quello, cioè, in cui l' acqua s' innalza e di quello nel quale l' acqua si perde, possono essere eguali due durate, senza che i rispettivi tempi di cui sono composte, si eguaglino; anche l' esperienze ci danno che col crescere la durata di un colpo d' Ariete, non cresce la quantità d' acqua innalzata, se non quando l' animella della fermata è ajutata ad aprirsi da una forza della stessa natura: ciò avviene nelle due sperienze 26 e 29 ove non avvi tensione della

molla, e solo il peso della ventola coadjuva ad aprirla; nelle due sperienze 25 e 28 le quali sono nello stesso caso; e nelle sperienze 32 e 35 nelle quali la molla con tre gradi di tensione lavora sull' animella della fermata, essendo anche in azione la ventola.

§ 234. Ma per meglio vedere la fiducia che possono meritare le nostre formole, instituiamo un altro esame dopo il quale ritorneremo a parlare delle riferite esperienze. Studiando l'esperienze a misura che si facevano, ho facilmente riconosciuto che in qualunque colpo d'Ariete quel tempo (pel quale l'animella della fermata stava chiusa, che è quello per cui sta aperta l'animella della salita e per cui continua l'acqua ad entrare nella campana) è piccolissimo e non misurabile, giacchè non giunge mai a fare la terza parte del secondo. Ora i risultamenti contenuti nelle tavole I e II ci danno appunto delle quantità piccolissime per esprimere quei tempi in ciascun colpo d'Ariete, e tanto piccole che io non so come potrebbero misurarsi; per questo punto adunque stimerò i risultamenti della Teorica come conformi alla sperienza.

Per ciò che si riferisce al tempo nel quale l'acqua si perde, io prendo in esame l'esperimento riferito al (232). Abbiamo detto che, avendo il condotto l'intiera sua lunghezza, il tempo impiegato dal getto a divenire invariabile è di secondi 4,5, e che l'acqua in questo tempo sgorgata è 0,0684724. Ora il risultamento 10mo della tavola I ci dà per quel tempo 50,6529", e per quella quantità di acqua metri cubici 1,05808; il risultamento adunque della Teorica in questo sperimento ci dà un tempo circa 11 volte maggiore del vero, ed una quantità di acqua circa 15 volte maggiore della vera.

È questa una prova che nel computare il tempo impiegato a fare il getto invariabile non si sono valutate tutte le resistenze che tendono a ritardare il moto dell' acqua nel condotto, per la qual cosa più tardi, secondo la Teorica, si fa l'equilibrio tra le forze acceleratrici e ritardatrici, di quello che lo faccia la natura; ma, lo confesso ingenuamente, io non vedo quali possano essere le trascurate resistenze, giacchè ho messe in computo tutte quelle che sin ora la Fisica sperimentale ci ha fatto scoprire nel moto dell'acqua.

Verrà forse un tempo nel quale la Fisica dei fluidi in moto avrà fatti tanti progressi, che niun dato mancherà al Geometra per calcolare i fenomeni.

Un corpo il quale liberamente cade nell' aria, presto cessa di muoversi con un moto accelerato; la sperienza ci mostra che questo tempo pei corpi leggeri è piccolissimo; e pure il calcolo ce lo dipinge infinito. Egualmente un corpo che si ponga in un fiume per essere strascinato dalla corrente, in pochi momenti acquista la velocità stessa della corrente, mentre il risultato del calcolo ci assicura che vi vuole un tempo infinito perchè questo succeda.

Vero è che in questi due casi l' Algebra ci dichiara che in pochi momenti il corpo perviene ad uno stato vicinissimo a quello, per giungere al quale richiedevasi un tempo infinito.

Queste discordanze dimostrano che noi non conosciamo ancora le leggi delle resistenze dei fluidi, e quindi non debbe arrecar maraviglia se tutto non può computarsi *a priori*.

Se nel problema da noi risoluto nella seconda Parte di questa Memoria, in cui si ricerca il tempo che impiega il getto a farsi invariabile, si trascurassero le forze ritardatrici le quali nascono dalla resistenza *d' attrito* dell' acqua nel condotto, e da quella che produce l' orlo della bocca, cui si appoggia l' animella della fermata, si troverebbe che ci vuole un tempo infinito onde il getto divenisse invariabile, ed aggiunte quelle resistenze, un tal tempo riducesi nel nostro Ariete a 50,6529″.

§ 235. Oltre la poca cognizione delle resistenze dei fluidi, che in problemi di tal fatta rende i risultamenti del calcolo difformi dalle sperienze, eravi nel nostro caso un' altra sorgente di discordanza. L' animella della salita era tenuta in guida da un asse il quale, insieme con i sostegni cui si appoggiava, stava al di sotto dell' animella medesima tutto immerso nell' acqua la quale riempiva la camera dell' Ariete. Questo dovea produrre un ritardamento ben considerabile all' acqua che si moveva, e più presto distruggere l' accelerazione di quel moto: ora io non ho introdotta in computo una tale resistenza, nè mi sarebbe stato possibile

16

d' introdurla, atteso che la irregolarità delle parti che componevano quell' appoggio dell' animella della salita, non permetteva che si potessero misurare. E qui mi dirà taluno che avrei potuto lavorare diversamente quell' animella, facendo che stesse al di sopra l' asse che la guida: è vero; ma avendo fatto fare l' Ariete prima di scriverne la Teorica, anzi al solo oggetto di studiarla con l' esperimentare, per quindi ridurne a calcolo gli effetti, non ho preveduto il vantaggio che poteva venirne dal fare in modo diverso alcune parti di questa macchina.

§ 236. L' esperimento registrato al § 232 ci dice in quanto tempo effettivamente il getto diviene invariabile, e la quantità di acqua sgorgata in tal tempo. Per saper poi la velocità dell' acqua a getto invariabile, la quale, secondo il calcolo (§ 225), era 2,86022, ecco come ho fatto.

Mancando del necessario apparato onde raccorre una gran quantità di acqua in un dato tempo, non potei per questa via misurare quella velocità; quindi procurai di ricavarla dalla cognizione delle coordinate del getto invariabile, le quali io aveva misurate (§ 232)

I 0,667;
II. 1,190;
III . . . . . . 0,369″;
IV 3,2249;
V 2,761;
VI . . . . . . 0,623391.

Il numero I è la misura dell' ascissa verticale data dalla sperienza;

Il numero II quella dell' ordinata orizzontale egualmente data dalla sperienza;

Il n.° III è il tempo che un corpo grave impiegherebbe a cadere liberamente per quell' ascissa verticale; è questo il terzo termine della proporzione $1'' : (\sqrt{4,9044} = 2,21) :: x : (\sqrt{0,667} = 0,8172)$, la quale ci dà $x = 0,369''$;

Il n.° IV. è la velocità dell' acqua nello sbocco del condotto, quando il getto ha quelle due coordinate, od è invariabile. Questa velocità è il quarto termine della proporzione $0,369'' : 1,19 :: 1'' : x = 3,2249$;

Il n.° V è la velocità in una qualunque sezione del condotto; e siccome la sezione del condotto sta a quella dello sbocco come 785:672, cioè, come 1,168:1, così questa velocità sarà $= \frac{3,2249}{1,168} = 2,761$;

Il numero VI in fine è la radice dell' altezza dovuta a questa velocità 2,761. Dunque prenderemo come un dato d' esperienza, che il getto diviene invariabile quando la velocità giunge a tale, che la radice dell' altezza a lei dovuta sia 0,623391.

§ 237. La velocità effettiva del getto invariabile è 2,761; cioè, minore di quella 2,86 dataci dal calcolo; ma la differenza non è grande, ed in questo possiamo assai contentarci dell' approssimazione. Essa, quella velocità, cioè, dell' esperienza, doveva essere minore della calcolata, perchè, come abbiamo detto qui sopra, non abbiamo potuto introdurre in calcolo quella resistenza che al corso dell' acqua arrecano il gambo e le staffe dell' animella della salita.

Cerchiamo ora con le formole del § 223 i valori di t e di Q che si convengono alla velocità 2,76, e facendo in quelle formole $\sqrt{v} = 0,623391$ si trova $t = 13,035''$; $Q = 0,216873$.

Quando adunque nel condotto non vi fossero altre resistenze che quelle da noi calcolate, l'acqua, per giungere ad acquistare la velocità 2,76, dovrebbe impiegare 13,035 secondi.

Mentre dunque il tempo dell' esperienza era $4,5''$, quello del calcolo è prossimamente triplo.

Supponiamo (F. 9.) che la linea AB rappresenti il tempo dato dal calcolo; la linea ab quello dato dall' esperienza. Nei punti B, b si alzino due perpendicolari eguali BC, bc, ciascuna delle quali rappresenti la velocità del getto invariabile. Se le due curve $AFGC$, $afgc$ saranno i luoghi geometrici delle velocità che ha l' acqua nel condotto alla fine dei diversi tempi indicati dalle ascisse, l' area ABC, ed in generale AEG rappresenterà la quantità di acqua che il calcolo ci dà pel tempo AE; e l' area abc, ed in generale aeg rappresenterà la quantità di acqua data dall' esperienza pel tempo

ae; e se di più supponiamo che le ordinate *DG*, *EF*, ecc. di una curva siano eguali all' ordinate *df*, *eg* dell' altra, allorquando le ascisse *AD*, *AE* sono tali parti di *AB*, quali *ad*, *ae* lo sono di *ab*, l' area *ABC* starà all' area *abc* come *AB*: *ab*;

Dunque se la quantità di acqua ABC *o in generale* abc, *data dal calcolo, si diminuisce nel rapporto di* AB : ab *che nel nostro caso è quello di* 3 : 1, *si avrà la quantità di acqua che ci somministra l' esperienza.*

Questa regola si verifica nell' addotto esperimento, poichè la terza parte della quantità di acqua data dal calcolo, è prossimamente eguale all' acqua sgorgata; cioè la quantità di acqua data dal calcolo è tanto maggiore dell' effettiva, quanto il tempo dato dal calcolo è maggiore dell' effettivo.

§ 238. Trovato il modo di correggere, per mezzo di un esperimento, i tempi e le quantità di acqua perdute in quelli, io pensava di correggere in questa guisa nelle tavole I e II i numeri delle colonne III e IV, diminuendoli nel rapporto di 3 : 1, per rifare di poi le colonne VIII, IX e X, onde avere dei risultamenti più conformi alle sperienze; ma ciò non essendomi avvenuto, io mi sono persuaso che, studiando ancora di più le sperienze, a misura che si facevano, avrei scoperte altre cagioni delle discordanze che s' incontrano tra esse e la Teorica: le osservazioni che ho fatto a questo proposito sono registrate nel capo seguente.

Del resto le sperienze riportate nelle tavole III e IV servono a confermare pienamente i principj da noi messi a calcolo nella Teorica geometrica dell' Ariete, imperciocchè siffatte sperienze confermano intieramente tutti i teoremi da noi dimostrati nella Teorica fisica.

Per esempio, ivi abbiamo detto che quanto più corto è il condotto della macchina, tanto più celeri sono i colpi dell' Ariete, ma è minore l' acqua innalzata e l' acqua perduta; gli esperimenti 1, 5, 9, quei 2, 6, 10; quei 3, 7, 11; e quei 4, 8, 12 mostrano questo ad evidenza. Posta la stessa lunghezza del condotto, più lenti sono i colpi dell' Ariete, maggiore è l' acqua innalzata e

la perduta, quanto maggiore è la distanza della ventola dallo sbocco: e tutto questo è confermato dalle sperienze 13 e 17, dalle 14 e 18, dalle 15 e 19, e dalle 16 e 20; come pure dalle sperienze della tavola IV. Si dica altrettanto degli altri teoremi della Teorica fisica.

CAPO V.

OSSERVAZIONI SOPRA LE RIFERITE ESPERIENZE.

§ 239. Io mi posi ad osservare attentamente il modo col quale l'acqua sgorga dal condotto all'aprirsi dell'animella della fermata, sia che questa schiudasi con la mano, come nel primo colpo d'Ariete, sia che aprasi da sè medesima come nei successivi.

Primieramente, allorchè si apre a mano l'animella della fermata, l'acqua incomincia a sgorgare a piena bocca dal condotto con una velocità la quale molto si allontana dall'esser nulla; e nel nostro Ariete, osservando io ove il getto al suo bel principio andava a cadere, ho ritrovato che con l'ascissa verticale di metri 0,667 esso aveva l'ordinata orizzontale di metri 0,34 circa.

In secondo luogo, allorquando nel secondo e negli altri colpi si apre successivamente da sè medesima l'animella della fermata, l'aria esterna introducesi per entro al condotto, e come se l'acqua si fosse ritirata indietro, osservasi il condotto (almeno per quel pezzo che può vedersi intieramente) ora vôto per un terzo, ora vôto per la metà, ora per due terzi circa della sua capacità, di modo che in quest'ultimo caso resta l'acqua al disotto dell'asse del condotto medesimo; nel momento perciò in cui l'animella si apre da sè stessa, l'acqua incomincia a sgorgare dal condotto, occupando ora due terzi, ora la metà, ora un terzo dell'altezza della bocca, ed incomincia con una velocità assai minore di quella con cui cominciava lo sgorgo, quando con la mano si apriva l'animella della fermata; questa velocità poi è minore, quanto maggiore è la capacità restata vôta di acqua per l'ingresso dell'aria esterna.

In terzo luogo ho veduto che col crescere l'altezza cui vuole

elevarsi l' acqua, col diminuire l' area dell' animella della salita, ed in generale coll' aumentare le resistenze all' ingresso dell' acqua nella campana, cresce quel moto d' acqua che abbiamo detto formarsi nell' ultimo pezzo del condotto, allora che aprendosi l' animella della fermata, l' aria esterna ci s' introduce. Questo vôto di acqua si fa anche maggiore, se maggiore è la velocità dell' acqua che dà il colpo.

In quarto luogo, il tempo pel quale sta aperta l' animella di fermata, cresce col crescere quel vôto di acqua.

§ 240. Indaghiamo le cause di questi fenomeni. Pel primo fenomeno io osservo che, aprendosi con la mano l' animella della fermata, l' acqua contenuta nella bocca *EF* (F. 8.) del condotto, dovrebbe, in vero, incominciare a sgorgare con velocità quasi nulla e cadere a piombo al di sotto della bocca, se niun' altra causa operasse per ispingerla fuori, che la pressione dell' acqua della vasca; e ciò accadrà appunto per l' acqua che si ritrova nella parte superiore della bocca, verso *E*. Ma l' acqua che occupa la parte inferiore della bocca, quell' acqua, cioè, che si trova verso *F*, debbe moversi e cominciare a sgorgare con qualche velocità per cagione della pressione del fluido che a lei sovrasta e che riempie la bocca sino in *E*; quindi è che tutti i filetti componenti la colonna fluida del condotto (i quali, al momento che si apre l' animella della fermata, sgorgar dovrebbero, come si è detto, con una velocità quasi nulla), per cagione appunto della pressione che i superiori fanno sopra gl' inferiori, sboccano con celerità diverse. La velocità è quasi nulla pel filetto *E* nell' istante dell' aprimento, ed è sempre maggiore pei filetti inferiori, finchè in *F* la velocità è quella che si debbe ad un' altezza appresso a poco eguale al diametro del condotto; quindi è che mercè la viscosità dell' acqua, lo sgorgo incomincerà con una velocità media tra tutte queste.

Non ho considerato nella Teorica questo elemento, la pressione, cioè, dei filetti superiori su gl' inferiori nella colonna acquea del condotto, ed ho riguardato come nullo il diametro del condotto a fronte dell' altezza dell' acqua nella conserva: questa supposizione è sempre permessa nel nostro caso, quando però l' azione

dell' acqua nella conserva produca il pieno suo effetto: allora in vero posso considerare tutti i filetti della colonna fluida come animati dalla medesima celerità, trovandosi tutti, appresso a poco, egualmente depressi sotto il livello dell' acqua nella vasca; ma al momento nel qnale si apre l' animella della fermata e che l' acqua della conserva non opera, od opera pochissimo, non debbe più trascurarsi la pressione dei filetti superiori sugl' inferiori, la quale debbe produrre un considerabile effetto, come veramente produce.

E di qui deriva che il tempo che impiegherà l' acqua dall' istante nel quale si apre l' animella della fermata e quello nel quale questa si chiude, sarà minore del tempo che impiegherebbe se non vi fosse quella cagione la qnale fa sì che il getto non cominci con la velocità nulla; parimente in questo caso sarà minore l' acqua perduta: i risultamenti adunque della Sperienza in ciò che si riferisce al tempo ed all' acqua perduta, saranno più piccoli di quelli ottenuti dalla Teorica, perchè il getto, in vece di cominciare dall' avere la ~~velocità zero, incomincia~~ dall' aver questa velocità di una grandezza; ma per tale motivo piccola e trascurabile sarebbe la differenza tra la Teorica e la Sperienza nel getto invariabile.

Nel nostro caso, supponendo che lo sgorgo cominci con la velocità dovuta all' altezza del semidiametro del condotto, cioè a 0,05, sarà questa celerità = 0,99, e con essa il getto sotto l' ascissa 0,667 avrà l' amplitudine 0,376, poco maggiore, cioè, di quella che effettivamente abbiamo trovata.

Se il getto avesse dovuto acquistare questa velocità incominciando da zero, non avrebbe neppure impiegato un secondo; quindi pel getto invariabile sempre o quasi sempre vi sarebbe stata la stessa discordanza tra il tempo e l' acqua perduta, somministrati dalla Sperienza, col tempo e l' acqua perduta dati dalla Teorica.

§ 241. Come l' aria esterna nei successivi colpi apra l' animella della fermata, s' introduca nel condotto, e quindi facciasi in esso quel vôto di acqua, è stato diffusamente spiegato nella Teorica fisica.

Ora al momento che si apre l' animella della fermata, l' acqua che non empie più l' intiera capacità del condotto, per causa di

quell' aria che vi si è introdotta, e che, per esempio, riempie il condotto sino al suo asse (almeno nell' ultimo tratto), dovrebbe incominciare a sgorgare con velocità quasi nulla in virtù solo dell' acqua della vasca, ma per causa della pressione delle sue parti superiori sulle inferiori essa incomincerà a sboccare con una velocità media tra zero e tra quella dovuta ad un' altezza eguale al semidiametro del condotto: dovrà dunque principiare a sgorgare con una velocità minore di quella con la quale principiava, quando aprivasi l' animella di fermata con la mano e che l' acqua cominciava a uscirne a piena gola; e tutto questo appunto ci mostra la Sperienza. E per tal motivo il tempo, il quale corre dal momento, nel quale si apre l' animella della fermata e quello nel quale si chiude, sarà maggiore in questo caso che nell' altro ove l' animella aprivasi con la mano; perchè in quest' ultimo caso l' acqua comincia dallo sgorgare con maggiore velocità che nel primo, mentre in ambedue la velocità dell' acqua per fare il chiudimento o per rendere invariabile il getto, esser debbe la stessa.

È ora da esaminare ciò che nel caso attuale avvenir debba per l' acqua perduta. Principiando lo sgorgo con una minore velocità, l'acqua perduta esser dovrebbe più grande in questo caso che in quello nel quale apresi l'animella con la mano; ma qui per un' altra ragione quest' acqua perduta scema; ed è perchè l' area da cui comincia lo sgorgo non è l' intiera bocca del condotto, ma soltanto una di lui parte. Queste due cause adunque contrariandosi, potrà avvenire che l' acqua perduta in quei due casi sia talvolta eguale e talvolta maggiore in un caso che nell' altro.

A conferma di questi ragionamenti riferisco i quattro sperimenti che seguono:

Num.° delle espe- rienze.	Durata de' 10 colpi in mezzi secondi.	Salita dell' acqua.	Acqua innalzata.	Acqua perduta.	
37	48,9	7,860	0,006119	0,091801	Colpi continui
38	52	10,956	0,003548	0,082167	
39	40	7,860	0,006119	0,092818	Colpi staccati
40	40	10,956	0,003548	0,092818	

Le circostanze qui non avvertite, nelle quali abbiamo fatti gli esperimenti, sono in tutti e quattro le stesse.

La lunghezza del condotto era per tutti questi sperimenti metri 11,614; l'animella della salita, metri quadrati 0,003825; la molla era fuori di azione, e l'animella della fermata chiudevasi per causa dell'urto dell'acqua sopra la ventola: questa ventola era distante dallo sbocco di metri 0,200 circa.

Negli esperimenti 37 e 38 l'Ariete lavorava al solito da sè medesimo, un colpo succedendo subito all'altro, come in tutte le altre esperienze registrate sin ora. Negli esperimenti 39 e 40 la cosa era diversa. Allorchè l'animella si chiudeva, io con la mano impediva che in virtù della spinta dell'aria si riaprisse; lasciava mettersi la macchina in quiete; poi quando l'acqua erasi di nuovo appoggiata dietro all'animella della fermata, dalla quale in principio si discostava mercè l'aria che dalle fessure dell'animella s'introduceva nel condotto, aprendo l'animella con la mano, faceva che l'Ariete desse un secondo colpo, e così di mano in mano. Essendo i colpi distaccati l'uno dall'altro, non si forma, nell'aprirsi dell'animella, quel vôto di

acqua di cui ho sopra parlato: l' acqua incominciava a sgorgare a piena gola dal condotto; in questo modo ho ottenuto sempre la stessa quantità di acqua perduta; e le durate dei colpi distaccati erano minori che quelle dei successivi. Eravi qualche difficoltà a misurare il tempo in cui seguivano i colpi staccati, ma coll'avvezzarsi a riguardare un pendolino che misurava le terze parti del secondo, ci assicurammo che ogni colpo seguiva in sei di queste parti, cioè in due secondi; il dondolo a mezzi secondi ci dette lo stesso risultamento.

§ 242. A spiegare il terzo fenomeno, io osservo che quanto maggiori sono le resistenze che l' acqua incontra a sgorgare nella campana, tanto maggiore è l' urto dell' acqua sopra le pareti del condotto, maggiore ne è il distendimento e la forza di elasticità, mercè la quale ritornano al loro primiero stato, e conseguentemente sarà anche maggiore la tendenza dell' acqua a distaccarsi dall' animella della fermata per ritornare indietro; e di qui segue che l' aria avrà maggior facilità per aprir l' animella stessa, ed introdursi nel condotto, e quindi sarà maggiore quel vôto di acqua che vedesi nell' ultimo tronco del condotto medesimo. L' altra parte del fenomeno dipende dallo stesso motivo.

Il quarto fenomeno in fine comprendesi da queste stesse ragioni e da ciò che si è detto al § antecedente.

§ 243. Premesse queste osservazioni e ragionamenti, ecco le discordanze che si osservano nell' esperienze:

1.° Quanto più cresce la lunghezza del cannello verticale, cioè quanto maggiore è l' altezza cui si vuol portar l' acqua, tanto maggiore (poste eguali tutte le altre circostanze) è la durata dei colpi d' Ariete (Si vedano le tavole III e IV);

2.° Questi incrementi di tempo sono tanto minori quanto maggiore è la velocità dell' acqua all' atto del chiudimento dell' animella della fermata. Tra gli altri gli esperimenti 1, 2, 3 e 4, confrontati con gli esperimenti 13, 14, 15 e 16, presentano questo fatto;

3.° Col crescere l' altezza del cannello verticale, talvolta cresce l' acqua perduta come nell' esperienze 1, 2, 3 e 4; talvolta scema

come nelle 13, 14, 15 e 16; talvolta conservasi costante come nelle 5 e 6, nelle 10 ed 11, nelle 21 e 22 ed in altre.

Essa scema quando è molto grande la velocità dell' acqua all' atto del chiudimento dell' animella della fermata.

§ 244. Il primo fatto dipende dal vôto d' acqua (§ 241) che si forma nel condotto allorchè schiudesi l' animella della fermata, il quale è maggiore quanto è maggiore la resistenza che incontra l' acqua ad entrare nella campana; e questa resistenza nel caso attuale cresce col crescere dell' altezza del cannello verticale.

A tenore di quanto c' insegna la Teorica, la durata dei colpi dovrebbe scemare coll' aumentare dell' altezza cui si porta l' acqua; giacchè allora lo sgorgo dell' acqua nella campana si farebbe in un più corto tempo, mentre da un altro canto il tempo nel quale l' acqua sbocca fuori del condotto, rimaner dovrebbe lo stesso.

Ma questi tempi nei quali l' acqua entra nella campana, e che sono quelli in cui l' animella della fermata sta chiusa, sebbene a colpo d' occhio ~~si riconosca che vanno~~ essi scemando col crescere dell' altezza cui si porta l' acqua, pure essendo piccolissimi e non misurabili dai nostri strumenti, non giungono mai a formare in dieci o venti colpi una tal diminuzione del tempo, per cui dura lo sperimento, che sia di qualche importanza. Non è però così dell' aumento che riceve il tempo nel quale sgorga l' acqua dalla bocca del condotto. Questo è cagionato dal vôto di acqua il quale formasi nell' ultimo pezzo del condotto allorchè si apre l' animella della fermata; e siffatto aumento è di gran lunga maggiore di quella diminuzione prodotta dalla prima cagione.

Se poi si fanno i colpi dell' Ariete staccati, onde non abbia luogo quel vôto di acqua, allora la durata di 10 colpi è sensibilmente la stessa; sia che si spinga l' acqua ad un' altezza o ad un' altra, ciò che mostrano ad evidenza le sperienze 39 e 40.

§ 245. Ecco donde dipende quel secondo fatto.

Fa vedere la Sperienza, e dimostra la Teorica, che quando apresi la bocca del condotto, l' acqua prestissimo acquista i primi gradi di velocità, e che poi sono sempre più lunghi i tempi per

acquistare successivamente altri eguali gradi della medesima, sino all' istante nel quale il getto diviene invariabile.

Ora quando è grande la velocità che ha l' acqua al chiudersi dell' animella della fermata, è per questa causa pur grande quel vôto di acqua; quindi picciola l' altezza cui l' acqua trovasi nella bocca del condotto, e per ciò picciola la velocità media con la quale comincia lo sgorgo. Aumentandosi quel vôto per causa dell' aumento nella lunghezza del cannello verticale, si farà più picciola ancora l' altezza cui si trova l' acqua nella bocca del condotto; quindi più picciola la velocità media con cui comincerà l' acqua a sgorgare. È poi evidente che in questo secondo caso l' acqua impiegherà maggior tempo per acquistare quella velocità necessaria al chiudimento dell' animella della fermata; ma siccome l' acqua acquista prestissimo i primi gradi di celerità, perciò quest' incremento di tempo sarà di poco rilievo.

Sia ora molto più picciola la velocità dell' acqua all' atto del chiudimento dell' animella della fermata; e per le due diverse lunghezze del cannello verticale, quei due vôti differiranno appresso a poco della medesima quantità di cui differivano prima, ma saranno però rispettivamente assai minori che nel caso precedente; quindi le due velocità con le quali cominceranno gli sgorghi, saranno rispettivamente maggiori che nel caso precedente, mentre esse differiranno prossimamente tra loro della stessa quantità della quale differivano quando la velocità dell' acqua nel chiudimento dell' animella della fermata era maggiore; di qui è che ancora in questo caso, se si aumenterà la lunghezza del cannello verticale, crescerà il tempo necessario all' acqua ad urtare sulla ventola e chiudere l' animella; ma questo tempo aumenterà di più di quello che aumentava nel caso precedente, perchè nell' attuale più lentamente acquista l' acqua quei primi eguali gradi di celerità.

Ma, per ispiegarmi più chiaramente, fingiamo due casi: nel primo sia necessaria una velocità di 20 gradi all' acqua per urtare la ventola; e nel secondo, avvicinata questa ventola, sia necessaria soltanto una velocità di 15 gradi.

Nel primo caso, spingendo l' acqua ad un' altezza A, incominci il getto con una velocità di 6 gradi, ed impieghi un tempo T prima di percuotere la ventola; spingendo poi l' acqua ad un' altezza B maggiore della prima, il getto incominci con una velocità di 4 gradi, ed impieghi un tempo T' prima di percuotere la ventola: è chiaro che T' supererà T di quel tempo necessario al getto per acquistare il quinto e sesto grado di celerità.

Nel secondo caso poi spingendo l' acqua ad un' altezza A, incominci il getto con una velocità di 12 gradi, ed impieghi un tempo t prima di urtare nella ventola; e spingendo l' acqua ad un' altezza B, incominci il getto con una velocità di 10 gradi, ed impieghi un tempo t' prima d' urtare nella ventola: è chiaro che t' supererà t di quel tempo necessario al getto per acquistare l' undecimo ed il duodecimo grado di velocità. Ora per acquistare questi due gradi volendoci molto più tempo che per acquistare il quinto ed il sesto grado, ne viene che la differenza tra t' e t sarà assai maggiore di quella tra T' e T.

Il terzo fatto dipende da ciò che si è detto alla fine del § 241.

Che poi l'acqua perduta scemi allorquando la velocità dell' acqua all' atto del mentovato chiudimento è molto grande, si comprenderà quando si rifletta che con l' aumentare dell' altezza del cannello verticale, pochissimo in questo caso cambiandosi il tempo che dura lo sgorgo, ma aumentando considerabilmente quel vôto d' acqua, la causa che tende a diminuire l' acqua perduta è grande, mentre quella che tende ad aumentarla, cioè l' aumento nel tempo dello sgorgo, è piccola.

Per assegnar poi i casi nei quali l' acqua perduta cresce, scema o si mantiene costante, converrebbe conoscere la grandezza di quelle due cagioni, ciò che sembrami oltre modo difficile. Gli esperimenti 39 e 40 ci mostrano ad evidenza la verità di questi ragionamenti, giacchè quando i colpi dell' Ariete si fanno distaccati l' uno dall' altro, per cui, come dissi, non può formarsi quel vôto d' acqua, allora l' acqua perduta è sempre la stessa.

§ 246. Dai medesimi principj dipende la spiegazione di alcuni altri fatti i quali sono cagione di altre discordanze negli esperimenti.

1.° Posta la stessa la velocità dell' acqua al chiudimento dell' animella della fermata, la durata dei colpi dell' Ariete cresce col diminuire dell' apertura dell' animella della salita.

2.° Questi incrementi nella durata riescono minori quanto maggiore è la velocità dell' acqua al chiudimento dell' animella della fermata.

3.° L' acqua perduta in egual numero di colpi, ma cangiando l' animella della salita, è talvolta maggiore, talvolta minore e talvolta la stessa.

Da quegli stessi principj anche si può ricavare la ragione per la quale l' animella della fermata con difficoltà si apre, e conviene ajutarla con l' azione della molla, quando la velocità con cui si fa il chiudimento è piccola, quando piccola è l' altezza del cannello verticale, ed in generale quando minori resistenze incontra l' acqua ad entrare nella campana. In questi casi in fatti piccolo essendo l' urto dell' acqua sulle pareti del condotto e sull' animella della fermata, piccola è anche la tendenza dell' acqua a retrocedere e distaccarsi dalle pareti e dall' animella; quindi è anche minore la facilità che ha l' aria a spingere ed aprire la stessa animella. Per questo, allorchè l' Ariete comincia a mettersi in moto, spesso avviene che debbasi per due o tre colpi aprire con la mano l' animella, ciò che succede finchè l' acqua non ha acquistata qualche altezza nel cannello verticale.

§ 247. Dalle cose dette sin qui apparisce quante e quali siano le ragioni per le quali il confronto delle Teoriche con le Sperienze non può presentare quella corrispondenza che si bramerebbe nelle Matematiche applicate, e che fin ora non abbiamo neppure ottenuta nelle più semplici macchine della Meccanica.

FINE DELLA TERZA PARTE.

APPENDICE

INTORNO ALL' OPERA DELL' ARIA

NELL' ALZAMENTO DELL' ACQUA.

Un esame più accurato di alcune sperienze avendomi messo in sospetto che la quantità dell' aria contenuta nella campana, oltre i due effetti descritti al § 14, Parte I, fosse anco valevole a rendere la macchina capace di alzare ora più, ora meno acqua, io instituii degli altri esperimenti per chiarirmene: provato il fatto, ne ho intrapresa la spiegazione ed il computo. Divido quest' Appendice in tre articoli: nel primo non faccio che semplicemente ragionare sopra questa operazione dell' aria; nel secondo ne do la valutazione ~~geometrica; e nel terzo~~ il confronto dei calcoli con gli esperimenti.

ARTICOLO PRIMO.

TEORICA FISICA DELL' OPERA DELL' ARIA.

§ 1. Per ben comprendere il tutto, fingiamo che, livellatasi l'acqua nei due vasi M, M' (F. 6, T. 1), si chiuda con un solido coperchio il vaso M', e questo coperchio combaci tanto bene col livello $A'B'$ dell' acqua che ad essa impedisca ogni più piccolo innalzamento. Se, avviato lo scolo dell' acqua per l' apertura EF, si chiude in un tratto questa apertura, che cosa avverrà egli? La colonna fluida contenuta nel condotto CDp, a guisa di un corpo solido dotata di quella velocità, anderà a percuotere l' animella H per aprirla e farsi un passaggio nel vaso; ma essendo l' acqua quasi incompressibile, se le pareti del vaso M' capaci non saranno di distendersi, non riuscirà all'acqua urtante d'entrare nel detto vaso, e tutto il di lei sforzo si ridurrà a

distendere le pareti del condotto entro cui corre la colonna fluida; e se le pareti del vaso M' ammetteranno distendimento, s' introdurrà un poco d' acqua nel vaso, quanto permette quel rilassamento delle pareti; e se, come in principio si pose, le pareti e 'l coperchio saranno incapaci assolutamente di dilatarsi, allora non entrerà neppure una goccia d' acqua nel vaso M'.

Se non vi fosse stato quel coperchio, da noi immaginato ad impedire l' innalzamento dell' acqua, allora, avendo essa tutta la libertà di sollevarsi nel vaso M', l' acqua urtante avrebbe innalzata l' animella H, e sarebbesi introdotta pel foro p nel vaso M', come si è diffusamente spiegato a suo luogo.

Se poi, essendovi il coperchio, si facesse in esso un foro cui fosse innestato un cannello verticale pel quale l' acqua del vaso M' avesse qualche campo di uscire, allora parmi chiaro che non avverrà nè il primo nè il secondo caso; s' introdurrà, cioè, nel vaso M' qualche quantità d' acqua, ma non tanta quanta se ne introduceva mancando intieramente il coperchio, e questa quantità di acqua introdotta sarà minore, a misura che più piccolo si farà quel pertugio nel coperchio o che più impedito sarà l' innalzamento dell' acqua.

§ 2. Ora continuando a supporre che un solido coperchio senza alcun pertugio chiuda il vaso combaciandosi con la superficie dell' acqua, e che entro di questo vaso sia collocata una vescica ripiena di aria nel suo stato naturale, e raccomandata alle pareti del vaso, è evidente che quest' aria si metterà in tale stato da fare equilibrio con la pressione dell' acqua che la circonda; e per ciò poi che si riferisce allo sforzo che fa l' acqua nel vaso M' per tener chiusa l' animella H, sarà la medesima cosa come se quella vescica non si trovasse nel detto vaso. Ma il caso sarà ben diverso riguardo all' urto della colonna acquea per aprire l' animella H, ed introdursi nel vaso. Questa colonna in vero farà sopra l' animella H la medesima percossa, come faceva quando non eravi la vescica nel vaso M'; ma mentre allora, mercè l' incompressibilità dell' acqua, non poteva rimuoversi dal suo posto l' animella, ora, essendo il fluido

contenuto nel vaso composto di aria e di acqua, sarà però capace di comprimersi e ridursi in minore spazio, quindi l'animella avrà qualche campo di alzarsi e potrà penetrare dell'acqua nel vaso; passerà poi nel vaso *M'* tanto maggior copia di acqua, quanto maggiore sarà la compressione ricevuta in questo conflitto dall'aria della vescica; anzi la quantità d'acqua entrata nel vaso sarà sempre eguale alla diminuzione di volume dell'aria della vescica nel costiparsi.

E siccome quanto maggiore è la massa di aria contenuta entro il vaso *M'* per mezzo di quella vescica e quanto minore è l'acqua compresa parimente in quel vaso, tanto è maggiore la capacità del fluido composto ad essere ristretto in minor volume; così la quantità dell'acqua che s'introdurrà nel vaso *M'* dall'apertura *p*, crescerà col crescere della quantità d'aria contenuta nel vaso medesimo e col diminuire della quantità d'acqua.

§ 3. Tutto questo succede ancora se nel coperchio siavi qualche apertura dalla ~~quale uscir possa l'acqua~~. La colonna urtante riesce allora ad aprire l'animella *H*, non solo perchè l'acqua del vaso, avendo la libertà di passare per l'apertura del coperchio, cede all'urto della colonna e permette l'ingresso di nuov' acqua dal foro *p*, ma ancora per la capacità di ridursi in minore spazio, che ha acquistata tutto il fluido contenuto nel vaso *M'*, il quale, come abbiamo detto, è composto di aria e d'acqua.

Vero è che quanto più potrà liberamente l'acqua innalzarsi, passando per l'apertura del coperchio, tanto meno verrà compressa l'aria di quella vescica, e quindi tanto minore sarà il vantaggio, cioè l'aumento procurato dalla presenza dell'aria all'acqua che dal foro *p* sgorga nel vaso *M'*; ma non avviene mai il caso che quell'aria sia assolutamente inutile alla quantità di acqua che al- l'atto dell'urto della colonna fluida s'introduce nel vaso *M'*.

§ 4. Con maggior facilità si potranno comprendere queste cose ove si osservi che l'opera di quell'aria si può in certo modo paragonare a quella di una molla che da una banda s'appoggia e preme un ostacolo, e sopra dell'altra si scaricano i colpi i quali,

con l' intermezzo di questa molla, muover debbono l' ostacolo medesimo. Se l' ostacolo fosse insuperabile e perfettamente rigida quella molla, qualunque colpo non farebbe mai sì che l' estremità percossa si avanzasse. La conseguenza sarà diversa, quando, posto l'ostacolo insuperabile, la molla sarà dotata della capacità di comprimersi e riserrarsi. Allora sì che l' estremità percossa progredirà, e tanto più quanto la molla è capace di maggior ristringimento. E questo stesso progresso dell' estremità percossa della molla e successivo di lei avvicinamento all' altra estremità, seguirà quando anche l'ostacolo fosse superabile, ed anche di così lieve resistenza da riguardarsi come nulla. Sempre in una molla anche liberissima e sciolta per ogni dove, ma materiale, se avvenga che una di lei estremità sia spinta avanti per un urto, anche l' altra estremità e tutta la molla progredirà, ma in quell' urto si avvicineranno i due capi della molla, per lo che essa verrà ad essere ristretta in minore spazio.

Credo che non siavi bisogno fare un minuto parallelo dei due casi, cioè, della molla e dell' aria, perchè è assai facile, annunziata, vederne la somiglianza.

§ 5. Tutte queste cose premesse (F. 3, Tav. II), facil si rende lo intendere come l' aria contenuta nella campana operi sulla quantità di acqua da innalzarsi e come questa sia maggiore, quanto maggiore è la quantita di quell' aria. La campana tien luogo di quel vaso *M'* chiuso con coperchio: l' aria che trovasi racchiusa nella parte più elevata della campana, fa il medesimo effetto di quella la quale riempieva la vescica collocata entro del vaso medesimo; ed il cannello che fa la comunicazione fra l' interno della campana e l' esterno, e pel quale l' acqua s' innalza, fa le veci dell' apertura la quale si finse fatta nel coperchio, per dare uscita all' acqua del vaso.

Nell' istante nel quale chiudesi l' animella della fermata, la colonna acquea urtante sull' animella della salita produce, dopo averla aperta, due effetti contemporaneamente. L' uno è quello di obbligare l' acqua ad innalzarsi pel cannello *NO*, ed uscire fuori della campana; e questo effetto dura per tutto quel tempo che

sgorga l' acqua nella campana, o che sta aperta l' animella della salita; l' altro si è quello di comprimere l' aria della campana, e questa compressione dura egualmente pel detto tempo. In virtù di questa compressione l' aria riducesi ad occupare un minor volume, e quanta è la diminuzione del di lei volume, altrettanta è la mole dell' acqua introdottasi.

Terminato il fluire dell' acqua nella campana, ed abbassatasi l' animella della salita, l' aria comincia a poco a poco a dilatarsi per riprendere quello stato di densità che aveva prima di un tal colpo della macchina, e che serve a fare equilibrio alla pressione dell' acqua soprastante nel cannello verticale. In questa dilatazione dell' aria l' acqua ascende e trabocca dall' alto del cannello, come diffusamente è spiegato nella fine della Parte I.

§ 6. Quanto abbiamo detto che debbe avvenire per cagione dell' aria contenuta nella campana dell'Ariete, effettivamente succede. Io tolsi dalla campana dell' Ariete la porzione di cannello interno, onde non potesse ~~in quella restarvi nascosta~~ dell' aria., e ne feci sperienza. L' Ariete giocò egualmente, ma piccole erano le quantità di acqua innalzate. Racchiusi entro la campana una vescica contenente poco più di un decimetro cubico di aria atmosferica, e crebbero allora quelle quantità di acqua. Diminuii quell' aria riducendola alla sua metà, ed ancora alla sua quarta parte; nascosi anche più vesciche simili a quella, ed osservai che, poste eguali tutte le altre circostanze, quanto maggiore era la quantità dell' aria, tanto maggiore quantità di acqua s' innalzava dall' Ariete.

Ma la quantità di acqua innalzata crescerà ella sempre col crescere dell' aria che sta racchiusa nella campana?

Per rispondere adequatamente a questa questione conviene maggiormente specificare il modo col quale l' aria si costipa e si dilata.

A misura che, stando uguale la densità, si aumenta il volume dell' aria con l' aggiunta di nuova aria, cresce anche la diminuzione di volume che una data percossa può produrre sopra quell' aria medesima; ed a misura che, stando uguale il volume, cresce la densità dell' aria con l' aggiunta di nuova aria, scema la

diminuzione di volume, che può produrre una data percossa: dunque nell' Ariete il volume di cui si costiperà l' aria in un colpo, e quindi la quantità di acqua che s' introdurrà con questo colpo nella campana, e che salirà pel cannello verticale, sarà tanto maggiore, quanto maggiore è il volume dell' aria, e quanto ne è minore la densità.

Dunque dall' aumentare dell' aria nella campana abbiamo per un verso un guadagno, e per un altro uno scapito. Il guadagno viene dall' esser maggiore il volume dell' aria, e lo scapito dalla maggior densità cui si dispone l' aria per cagione della pressione dell' acqua nel cannello ascendente. Quanto maggiore è la quantità dell' aria nella campana, tanto più depressa rimane sotto quella colonna di acqua, e quindi ne è maggiore la sua compressione; dunque in un dato Ariete vi sarà per ogni altezza una certa tal quantità di aria, che produrrà il massimo vantaggio.

Noi abbiamo detto di sopra che, terminato il fluire dell' acqua nella campana, l' aria costipata comincia a dilatarsi per tornare al primiero stato, e che con questo mezzo espelle l' acqua dall' alto del cannello. Ora questa dilatazione debbe compirsi nell' intervallo del tempo che corre tra due aprimenti consecutivi dell' animella della salita, affinchè un secondo colpo trovi l' aria della campana nelle stesse circostanze in cui si trovava al primo, e quindi v' introduca la stessa quantità di acqua.

Ma può avvenire che aumentando di troppo quest' aria, il tempo a lei necessario per dilatarsi sia maggiore di quell' intervallo, e che perciò il secondo colpo trovi l' acqua non ancora ridotta al suo primiero stato, e quindi impicciolita di volume ed aumentata di densità, per il che questo secondo colpo ed i successivi non introdurranno nella campana tanta acqua, quanta ve ne introdusse il primo, o quanta introdur ve ne potrebbe un altro colpo che vi trovasse minor volume di aria ma di minor densità. Ed ecco anche per questo che vi sarà una tal quantità di aria da produrre il massimo effetto.

Del resto in questo ultimo caso si avrà, in un dato numero di colpi, più acqua innalzata se questi si saranno distaccati l' uno

dall'altro, lasciando all'aria il tempo per tornare al suo stato, piuttosto che continui; ma allora in un tempo determinato, come sarebbe di un'ora, seguirà un minor numero di colpi, onde per questo motivo sarà minore l'acqua innalzata in quell'ora.

ARTICOLO II.

TEORICA GEOMETRICA DELL' OPERA DELL' ARIA.

§ 7. Prima d' accingermi alla soluzione di alcuni Problemi sull' opera dell' aria per innalzar l' acqua, premetterò alcune nozioni che risguardano la compressione dei fluidi elastici.

I. Chiamo *flessibilità* di un volume d' aria quella qualità, in virtù della quale essa cede all' urto di un corpo, ristringendosi in minore spazio.

II. Questa flessibilità cresce col crescere del volume dell' aria, essendo eguale la densità.

III. Scema col crescere della densità dell' aria, essendo eguale il volume.

IV. Pongo che questa flessibilità stia in ragion diretta del volume, ed inversa della densità. Per una data massa di aria sia E il volume, Δ la densità: io pongo la flessibilità proporzionale a $\frac{E}{\Delta}$.

V. Quanto è maggiore la flessibilità o l' obbedienza dell' aria nel cedere all' urto, tanto è minore in conseguenza la resistenza che essa oppone a quest' urto medesimo; dunque una tale resistenza seguirà la ragion diretta della densità, e l' inversa del volume. Dunque indicando per R questa resistenza, per $\varkappa$ un coefficiente costante, sarà $R = \varkappa \frac{\Delta}{E}$.

La quantità $\varkappa$ debb' essere data dall' esperienza.

§ 8. PROBLEMA I. *Nel vaso* M *chiuso superiormente dal coperchio* GH, *metta foce un cannello orizzontale* $NCDK$ (F. 10, T. II). *Scorra entro del cannello uno stantuffo* S *il quale combaci così bene con le pareti*

di esso, che non permetta il passaggio all' aria. Trovandosi lo stantuffo in S *ed impedito a tornare indietro dai due denti* oo, *sia il vaso ed il cannello ripieno di aria ad una densità maggiore di quella dell' atmosfera. Se un corpo* P, *dotato di una celerità* C, *anderà ad urtare lo stantuffo* S, *ei lo caccerà avanti sino in* S″, *comprimendo in questa guisa l' aria nel vaso* M: *cercansi ora l' equazioni esprimenti le circostanze tutte del moto dello stantuffo.*

Soluzione.

Sia a^2 la base dello stantuffo;
$l = AC$ la lunghezza del cannello innestato al vaso M;
E il volume dell' aria contenuta nel vaso M;
D' la densità dell' aria contenuta nel vaso e nel cannello;
P la massa del corpo urtante;
p quella dello stantuffo:
c l' altezza dovuta alla celerità con la quale si fa l' urto;
t il tempo, alla fine del quale lo stantuffo trovasi in S';
x lo spazio AA' descritto in quel tempo t;
v l' altezza dovuta alla velocità che ha lo stantuffo in S'.

La forza motrice, la quale tende a ritardare il moto dello stantuffo alla fine del tempo t, quando, cioè, egli si trova in S', sarà quella forza di resistenza R, valutata qui sopra (V); sarà cioè $s \dfrac{a^2 \Delta}{\{E + a^2(l-x)\}}$. Essendo Δ la densità dell' aria quando lo stantuffo è giunto in S', ed $E + a^2(l-x)$ il volume di quell' aria.

Ho moltiplicato per a^2 l' espressione della forza R assegnata al num. V, perchè è evidente che se lo stantuffo ed il peso dotati essendo delle stesse velocità, lo stantuffo però opponesse soltanto la metà della superficie all' aria che si costipa, egli avrebbe sofferta in ogni istante la metà della resistenza a progredire innanzi.

Questa forza motrice, divisa per la somma delle masse delle quali debbe ella ritardare il moto, ci darà la forza acceleratrice, che nel nostro caso è negativa perchè appunto ritarda il movimento.

Sarà dunque $-ga^2 \frac{\Delta}{(P+p)\{E+a^2(l-x)\}}$ questa forza acceleratrice.

L'equazione per tanto del nostro movimento sarà

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -ga^2 \frac{\Delta}{(P+p)\{E+a^2(l-x)\}}$; ma il Δ è ancora esso una funzione della x; troviamola.

Essendo D' la densità dell'aria allorchè lo stantuffo non ha cominciato a muoversi, sarà $D' : \Delta :: E + a^2(l-x) : E + a^2 l$; quindi $\Delta = \frac{D'(E+a^2 l)}{E+a^2(l-x)}$.

Sarà pertanto la nostra equazione

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -g \cdot \frac{a^2 D'(E+a^2 l)}{(P+p)\{E+a^2(l-x)\}^2};$$

e facendo $A = -\frac{ga^2 D'(E+a^2 l)}{P+p}$, avremo

$$(a) \ldots\ldots \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{A}{\{E+a^2(l-x)\}^2}.$$

§ 9. Si moltiplichino i membri della trovata equazione per $\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$, e si avrà $\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt = \frac{A\left(\frac{dx}{dt}\right)dt}{\{E+a^2(l-x)\}^2}$, il cui integrale è

$$(b) \ldots\ldots \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{A}{a^2\{E+a^2(l-x)\}} + \frac{C}{2},$$

ove C rappresenta la costante arbitraria portata dalla integrazione.

Quest' equazione ci dà $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sqrt{\left\{\frac{2A}{a^2\{E+a^2(l-x)\}} + C\right\}}$,

che si riduce a $dt = \frac{a}{\sqrt{2A}} \times \frac{\sqrt{\{E+a^2(l-x)\}} \times dx}{\sqrt{\left\{1 + \frac{Ca^2\{E+a^2(l-x)\}}{2A}\right\}}}$.

Facciamo $\frac{Ca^2}{2A}\left\{E + a^2(l-x)\right\} = z$, ed avremo $-\frac{Ca^4}{2A}dx = dz$;

quindi $dx = -\frac{2A}{Ca^4}dz$; e per ciò l' equazione si trasformerà in quest' altra $-\frac{2A}{a^4C\sqrt{C}} \times \frac{\sqrt{z}\cdot dz}{\sqrt{(1+z)}} = dt$, ovvero $\frac{\sqrt{z}\cdot dz}{\sqrt{(1+z)}} = 2\,Bdt$, facendo $-\frac{a^4C\sqrt{C}}{2A} = 2B$. Si moltiplichi ora il numeratore e denominatore del primo membro per $\sqrt{z}$, e si avrà $\frac{zdz}{\sqrt{(z+z^2)}} = 2\,Bdt$.

Per integrare quest' ultima equazione pongo $\sqrt{(z+z^2)} = uz$, ed ho $1+z = u^2z$; $z = \frac{1}{u^2-1}$; $dz = -\frac{2udu}{(u^2-1)^2}$; quindi

$\frac{du}{(u^2-1)^2} = -Bdt$; $\int\frac{du}{(u^2-1)^2} = -Bt + C'$,

essendo anche C' un' altra costante arbitraria.

Ora $\frac{1}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u-1)^2} + \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)}$;

dunque $\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1} + \log\frac{u-1}{u+1} = 4\,Bt + C'$; ovvero

$\frac{2u}{u^2-1} + \log\frac{u-1}{u+1} = 4Bt + C'$. Ma $u^2 - 1 = \frac{1}{z}$, e $2u = \frac{2\sqrt{(z+z^2)}}{z}$;

$\frac{u-1}{u+1} = \frac{\sqrt{(1+z)}-\sqrt{z}}{\sqrt{(1+z)}+\sqrt{z}}$; dunque $2\sqrt{(z+z^2)} + \log\frac{\sqrt{(1+z)}-\sqrt{z}}{\sqrt{(1+z)}+\sqrt{z}} = 4Bt+C'$;

ed in conseguenza, ponendo per z il suo valore,

$$(c)\ldots 2\sqrt{\left\{\frac{Ca^2}{2A}\Big(E+a^2(l-x)\Big)\right\}} \times \sqrt{\left\{1+\frac{Ca^2}{2A}\Big(E+a^2(l-x)\Big)\right\}} + \log\frac{\sqrt{\left\{1+\frac{Ca^2}{2A}\Big(E+a^2(l-x)\Big)\right\}} - \sqrt{\left\{\frac{Ca^2}{2A}\Big(E+a^2(l-x)\Big)\right\}}}{\sqrt{\left\{1+\frac{Ca^2}{2A}\Big(E+a^2(l-x)\Big)\right\}} + \sqrt{\left\{\frac{Ca^2}{2A}\Big(E+a^2(l-x)\Big)\right\}}} = 4Bt + C'.$$

La prima costante C si determinerà per mezzo della condizione che la velocità $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ abbia il valore somministratoci dai dati del problema quando $x=o$; e la seconda C' si determinerà per modo che lo spazio x sia nullo quando $t=o$.

§ 10. Essendo $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{c}$ la velocità del corpo P che urta lo stantuffo, sarà $\frac{2\sqrt{h}}{\theta}P\sqrt{c}$ la di lui quantità di moto; onde supponendo i due corpi il P, cioè, e lo stantuffo perfettamente duri, la velocità con la quale questi due corpi incominceranno a camminare dopo l'urto, sarà $\frac{\frac{2\sqrt{h}}{\theta}\times P\sqrt{c}}{P+p}$; e con questa velocità comincerà a muoversi lo stantuffo nel cannello.

Avremo adunque per determinare la costante C quest' equazione

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{h}.P\sqrt{c}}{\theta(P+p)}\right)^2=\frac{A}{a^2(E+a^2l)}+\frac{C}{2}.$$

E ponendo per A il suo valore, sarà $\frac{2hP^2c}{\theta^2(P+p)^2}=-\frac{8D'}{P+p}+\frac{C}{2}$;

quindi $C=\frac{4hcP^2}{\theta^2(P+p)^2}+\frac{28D'}{P+p}$.

Il valore poi di C' sarà dato da quest'altra equazione

$$2\sqrt{\frac{Ca^2}{2A}(E+a^2l)}\times\sqrt{\left\{1+\frac{Ca^2}{2A}(E+a^2l)\right\}}+$$

$$\log\frac{\sqrt{\left\{1+\frac{Ca^2}{2A}(E+a^2l)\right\}}-\sqrt{\frac{Ca^2}{2A}(E+a^2l)}}{\sqrt{\left\{1+\frac{Ca^2}{2A}(E+a^2l)\right\}}+\sqrt{\frac{Ca^2}{2A}(E+a^2l)}}=C'.$$

Ora $\frac{Ca^2}{2A}(E+a^2l)=-\frac{P+p}{28D'}\left\{\frac{4hcP^2}{\theta^2(P+p)^2}+\frac{28D'}{P+p}\right\}$

$=-\left\{\frac{2hcP^2}{8\theta^2D'(P+p)}+1\right\}$; dunque sarà

$$C' = 2\sqrt{\left\{-\left(\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}+1\right)+\left(\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}+1\right)^2\right\}}+$$

$$\log\frac{\sqrt{-\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}}-\sqrt{\left\{-1-\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}\right\}}}{\sqrt{-\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}}+\sqrt{\left\{-1-\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}\right\}}}.$$

§ 11. Per avere il valore di x, quando lo stantuffo giunge a fermarsi in S'', conviene nell' equazione (b) fare $\left(\frac{dx}{dt}\right)=o$. Si ha allora

$$(e)\;.\;.\;\frac{A}{a^2\{E+a^2(l-x)\}}+\frac{C}{2}=o,\text{ da cui si ha } x=\frac{2A}{Ca^4}+\frac{E}{a^2}+l;$$

ove ponendo per A e per C i rispettivi valori, avremo

$$x=\frac{1}{a^2}(E+a^2l)\left\{1-\frac{\upsilon D'\theta^2(P+p)}{2hcP^2+\upsilon D'\theta^2(P+p)}\right\}.$$

Per avere il valore di t, che impiega lo stantuffo per venire in S'', ove io suppongo che retrocedere non possa, osservo che dall' equazione (e) si ricava $\frac{Ca^2\{E+a^2(l-x)\}}{2A}=-1$, e sostituendo questo valore nell' equazione (c), si ottiene

$$2\sqrt{-1}\cdot\sqrt{(1-1)}+\log\frac{\sqrt{(1-1)}-\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-1)}+\sqrt{-1}}=4Bt+C';\text{ e quindi}$$

$$4Bt+C'=\log(-1);\text{ ed in conseguenza } t=\frac{1}{4B}\left\{\log(-1)-C'\right\};$$

$$t=\frac{1}{4B}\left\{-2\sqrt{\left\{-\left(\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}+1\right)+\left(\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}+1\right)^2\right\}}-\right.$$

$$\left.\log\frac{-\sqrt{\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}}+\sqrt{\left\{1+\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}\right\}}}{\sqrt{\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}}+\sqrt{\left\{1+\frac{2hcP^2}{\upsilon\theta^2 D'(P+p)}\right\}}}\right\}.$$

§ 12. Scolio. Io non ho considerato lo sfregamento che soffre lo stantuffo nel muoversi entro del cannello: volendo valutarlo, bisognerebbe considerare la massa P, maggiore, di ciò che è realmente, di una di sua terza parte, o di altra maggior porzione equivalente a quell' attrito.

§ 13. Problema II. *Il cannello orizzontale* AD *ove trovasi lo stantuffo, sia continuato indietro, e metta foce in un vaso* M′, *in cui l' acqua mantengasi sempre allo stesso livello nel mentre sgorga da un foro* p, *fatto nel fondo dello stesso cannello accosto allo stantuffo* S (F. 11, T. II).

Nel momento nel quale l' acqua traversa una sezione ZZ *del condotto con una velocità dovuta ad una data altezza* H, *chiudasi in un tratto l' apertura* p, *onde la colonna fluida* NKp *vada ad urtare lo stantuffo* S, *e lo spinga innanzi come nel precedente Problema: cercasi alla fine del tempo* t, *quando lo stantuffo si troverà in* S′, *l' equazione del moto dell' acqua nel condotto.*

Soluzione.

Ecco in qual cosa differisce questo Problema dal precedente: 1.° Qui il corpo che urta lo stantuffo cresce successivamente finchè dura quel urto, e nel risoluto problema era costante; 2.° qui il corpo urtante è fornito di una velocità e di una forza acceleratrice: questa mancava nell' altro.

Riteniamo le supposizioni del Problema precedente, e di più chiamamo λ la lunghezza Np del cannello; V l' altezza dovuta alla velocità con la quale l' acqua sgorgherebbe dal vaso M' se il cannello non ci fosse;

D la gravità specifica dell' acqua; n il coefficiente d' attrito da noi determinato al § 216; e da ciò che si è detto ai §§ 119 e 175 rileveremo che l' equazione differenziale di questo Problema è

$$(f) \ldots\ldots \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{4h}{2\left(\lambda+x+\frac{P}{Da^2}\right)\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2 - \frac{2\sqrt{h}}{\theta}n\sqrt{v} - \frac{8a^4D'(E+a^2l)}{\{a^2(\lambda+x)D+p\}\{E+a^2(l-x)\}^2}.$$

Piuttosto che fermarmi a trattare quest' equazione, io prendo un altro Problema che sempre più si avvicini al caso di quei che fanno pel nostro bisogno.

§ 14. PROBLEMA III. *Il cannello o condotto che unisce due vasi* M', M *sia fatto come ci mostra la* (F. 12, T. II): *la porzione* AC *abbia un gomito in* L, *ed essendo* AL *orizzontale, sia* LC *verticale e metta foce per di sotto nel vaso* M.

Lo spazio ABLbaA, *posto innanzi allo stantuffo* S, *sia ripieno d' acqua, e l' aria stia nello spazio* HDbaCG. *Allorchè l' acqua ha in* ZZ *la velocità dovuta ad una data altezza* H, *si fermi in un tratto lo sgorgo dal foro* p, *onde la colonna fluida urti lo stantuffo e spinga lui e l' acqua che gli sta innanzi; cercasi l' equazione del moto alla fine del tempo* t, *contando questo tempo dal momento nel quale si chiude il foro* p.

SOLUZIONE.

Qui il peso dello stantuffo, indicato nei Problemi precedenti per p, è composto del vero peso dello stantuffo S e del peso di quella colonna fluida che trovasi innanzi al detto stantuffo sino in ab. Di questa colonna la porzione AL è orizzontale, e LC è verticale. Dal peso di quest'ultima porzione nasce dunque una forza ritardatrice che si oppone al moto dello stantuffo spinto dall' acqua che lo urta. Indichiamo per g quella porzione orizzontale, e per g' la verticale: la lunghezza poi della porzione Ca del condotto sarà quella che nei precedenti Problemi indicata abbiamo per l.

Ora in vece di p dovremo porre $p + a^2 (g + g') D$; ciò fatto, indicando la gravità per $\frac{2h}{\theta}$, all' equazione del Problema precedente aggiungere dovremo il termine il quale nasce dalla nuova forza ritardatrice. Alla fine del tempo t il cilindro acqueo verticale è $(g' + x) a^2 D$; sarà dunque $(g' + x) a^2 D \cdot \frac{2h}{\theta}$ la forza motrice che nasce dal di lui peso, la quale, divisa per la somma delle masse, al moto delle quali essa si oppone, ci darà la forza ritardatrice. Questa somma è $a^2 (\lambda + x + g + g') D + p$; sarà per tanto

$\dfrac{(g'+x)a^2D\cdot\frac{2h}{\theta}}{a^2(\lambda+x+g+g')D+p}$ la forza ritardatrice mentovata.

L' equazione pel nostro problema sarà dunque

$$(g)\ldots\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{4h}{2\left(\lambda+x+g+g'+\frac{p}{Da^2}\right)\theta^2}\cdot(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}n\sqrt{v}-$$

$$\frac{8a^2D'(E+a^2l)}{\{a^2(\lambda+x+g+g')D+p\}\{E+a^2(l-x)\}^2}-\frac{(g'+x)a^2D\cdot\frac{2h}{\theta}}{a^2(\lambda+x+g+g')D+p}.$$

§ 15. PROBLEMA IV. *Poste tutte le cose come nel Problema precedente, noi supponiamo che la colonna acquea, la quale debbe spingere avanti lo stantuffo* S, *sia obbligata ad attraversare un diaframma la cui grossezza possa aversi per nulla dirimpetto alla lunghezza del condotto, e si cerca l' equazione del moto dello stantuffo in questo caso.*

Per aver la bramata equazione altro non si ha da fare che aggiungere al secondo membro il termine $-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}n'\sqrt{v}$, nel quale consiste la forza ritardatrice prodotta da quel diaframma; l' equazione del problema sarà dunque

$$(h)\ldots\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{2h}{\left(\lambda+g+g'+x+\frac{p}{Da^2}\right)\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-$$

$$\frac{2\sqrt{h}}{\theta}(n+n')\sqrt{v}-\frac{a^2}{a^2(\lambda+x+g+g')D+p}\left\{\frac{2h}{\theta}(g'+x)D+\frac{8D'(E+a^2l)}{\{E+a^2(l-x)\}^2}\right\};$$

supponiamo che la x sia piccola in confronto delle quantità λ, g' ed l, e si avrà l' equazione più semplice

$$(i)\ldots\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{2h}{\left(\lambda+g+g'+\frac{p}{Da^2}\right)\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-$$

$$\frac{2\sqrt{h}}{\theta}(n+n')\sqrt{v}-\frac{a^2}{a^2(\lambda+g+g')D+p}\left\{\frac{2h}{\theta}g'D+\frac{8D'}{E+a^2l}\right\};$$

e facendo $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{\sqrt{h}}{\theta} \times \frac{1}{\sqrt{v}} \left(\frac{dv}{dt}\right)$, si avrà, posto però

$$\frac{a^2}{a^2(\lambda+g+g')D+p}\left\{\frac{2h}{\theta}g'D+\frac{\delta D'}{E+a^2l}\right\}=B,$$

$$(l)\ldots.\; dt\left\{\frac{2h}{(\lambda+g+g'+\frac{p}{Da^2})\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2-\frac{2\sqrt{h}}{\theta}(n+n')\sqrt{v}-B\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{h}}{\theta}\times\frac{dv}{\sqrt{v}};\text{ quindi } dt=\frac{dv}{(a+b\sqrt{v}+cv)\sqrt{v}} \text{ essendo}$$

$$a=\frac{2\sqrt{h}}{(\lambda+g+g'+\frac{p}{Da^2})\theta}V-\frac{\theta B}{\sqrt{h}};$$

$$b=-\frac{4\sqrt{h}}{(\lambda+g+g'+\frac{p}{Da^2})\theta}\sqrt{V}-2(n+n');$$

$$c=\frac{2\sqrt{h}}{(\lambda+g+g'+\frac{p}{Da^2})\theta};$$

avremo pertanto, come al § 158, $t=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{2c\sqrt{v}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{v}+b+2c\alpha}+C$, essendo $4c^2\alpha^2=b^2-4ac$.

Per determinare la costante C faremo così: quando $t=o$, la velocità dell' acqua nella sezione ZZ debb' essere

$\dfrac{\frac{2\sqrt{h}}{\theta}a^2\lambda D\cdot\sqrt{H}}{a^2(\lambda+g+g')D+p}$; dunque, indicando per H' l'altezza dovuta a questa velocità, sarà $\sqrt{H'}=\frac{a^2\lambda D\sqrt{H}}{a^2(\lambda+g+g')D+p}$; perciò

$o=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{2c\sqrt{H'}+b-2c\alpha}{2c\sqrt{H'}+b+2c\alpha}+C$, e quindi

$C=\frac{1}{c\alpha}\cdot\log\frac{2c\sqrt{H'}+b+2c\alpha}{2c\sqrt{H'}+b-2c\alpha}$. Avremo in conseguenza

$$(n)\ldots t = \frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{(2c\sqrt{v}+b-2c\alpha)(2c\sqrt{H'}+b+2c\alpha)}{(2c\sqrt{v}+b+2c\alpha)(2c\sqrt{H'}+b-2c\alpha)};$$

ed il tempo nel quale terminerà il movimento sarà

$$(m)\ldots t = \frac{1}{c\alpha}\cdot log\frac{(b-2c\alpha)(2c\sqrt{H'}+b+2c\alpha)}{(b+2c\alpha)(2c\sqrt{H'}+b-2c\alpha)}.$$

Se ora si cercasse la quantità d' acqua che nel tempo t è passata per la sezione ZZ del condotto, questa si troverebbe come al § 160, e sarebbe

$$Q = \frac{a'\sqrt{h}}{8\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot log(b+2c\alpha+2c\sqrt{v})-(b-2c\alpha)\cdot log(b-2c\alpha+2c\sqrt{v})\right\}+C.$$

Qui però debbe determinarsi la costante C per modo che $v=H'$, dia $Q=o$. Sarà allora

$$(p)\ldots Q=\frac{a'\sqrt{h}}{8\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot log\frac{b+2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b+2c\alpha+2c\sqrt{H'}}-(b-2c\alpha)\cdot log\frac{b-2c\alpha+2c\sqrt{v}}{b-2c\alpha+2c\sqrt{H'}}\right\}.$$

E facendo $v=0$, si ha tutta la quantità di acqua che traversa la sezione ZZ finchè dura quel movimento: sarà, cioè, una tal quantità d' acqua

$$(q)\ldots Q=\frac{a'\sqrt{h}}{8\alpha c^2}\left\{(b+2c\alpha)\cdot log\frac{b+2c\alpha}{b+2c\alpha+2c\sqrt{H'}}-(b-2c\alpha)\cdot log\frac{b-2c\alpha}{b-2c\alpha+2c\sqrt{H'}}\right\}.$$

Si avverta che a' tien luogo dell' area a^2 della sezione ZZ.

§ 16. Scolio. La formola (q), riguardata come appartenente alla equazione (h), non è esatta, avendo in questa equazione trascurata la x; ma si possono col mezzo di essa aver dei risultamenti più esatti di quegli ottenuti. In fatti la detta formola (q) c' insegna quanto l' acqua si è innalzata entro la porzione verticale del condotto LC, nell' ipotesi che quella x fosse trascurabile o potesse prendersi per zero in confronto di l, λ e g'. Ora facciamo x eguale alla metà dell' innalzamento datoci dalla formola (q), ed aggiunta questa metà alla g' si sostituisca nell' equazione (i) in vece di g', e s' integri da capo l' equazione medesima. I risultamenti che in questa ipotesi verranno per t e per Q, saranno assai più esatti dei precedenti.

§ 18. Problema V. *Supponendo l' Ariete formato come mostra la Figura 13 della Tav. II, e supponendo che già con i successivi colpi di Ariete siasi pervenuti a fare sboccare l' acqua dall' alto del cannello* O, *onde si ritrovi pieno di acqua tutto questo cannello e lo spazio della campana o del vaso* PG *inferiore a* cd, *mentre l' aria è restata confinata nella parte superiore della campana tra* cd *e* GH, *cercasi in un nuovo colpo di Ariete la quantità di acqua entrata nella campana, ed il tempo nel quale entra.*

Soluzione.

Questo Problema è diverso dal precedente. Qui nel tempo che l' aria è premuta dall' urto dell' acqua, essa ha qualche libertà di distendersi innalzando l' acqua nel cannello NO; pure quell' urto durando pochissimo tempo, e poca essendo quella libertà di distendersi, io non valuterò questa circostanza favorevole all' alzamento dell' acqua, e supporrò che questo sia un caso simile a quello del Problema citato.

Dunque le formole ritrovate ai §§ 15 e 16 per t e per Q saranno quelle delle quali faremo uso nell' attuale quesito.

In esse però dovremo fare $l=o$; $g=o$; $p=o$; g' eguale all' altezza dell' acqua nella campana al di sopra dell' animella S, della quale trascuro il peso.

La supposizione che abbiamo fatta di trascurare la x dell' equazione precedente, porterà nel nostro caso un errore tanto più piccolo quanto maggiore è la larghezza cd della campana.

Dunque le formole (m), (q) delle quali la prima ci assegna il tempo nel quale entra l' acqua nella campana, e la seconda la quantità che ve n' entra, dovranno ridursi al nostro caso, ciò che otterremo, facendo

$$a = \frac{2\sqrt{h}}{(\lambda+g')\theta}\cdot V - \frac{\theta}{\sqrt{h}(\lambda+g')D}\left\{\frac{2hg'D}{\theta}+\frac{8D'}{E}\right\};$$

$$b = -\frac{4\sqrt{h}}{(\lambda+g')\theta}\cdot\sqrt{V} - 2(n+n');$$

$$c = \frac{2\sqrt{h}}{(\lambda+g')\theta}; \qquad \sqrt{H'} = \frac{\lambda D\sqrt{H}}{(\lambda+g')D} = \frac{\lambda}{\lambda+g'}\sqrt{H}.$$

ARTICOLO III.

CONFRONTO DEI RISULTAMENTI DELLA TEORICA CON GLI ESPERIMENTI.

§ 19. In quest' articolo cercheremo di ridurre a risultamenti numerici la stima dell' opera dell' Ariete riguardo all' acqua che s' innalza, mettendo in computo l' aria della campana; e poi confronteremo quei risultati con gli esperimenti.

Anche qui vedremo che tutta la difficoltà nasce dallo stato imperfetto in cui si trova la Fisica del moto dei fluidi elastici; pure cercheremo di ajutarci, più che si può, con alcune esperienze che abbiamo avuto il comodo di fare.

Le quantità che entrano come *dati* nei problemi di questa Appendice, sono state per la maggior parte determinate nel Capo I della terza Parte. Qui non si hanno di nuovo che ϑ e D', la prima delle quali è il coefficiente costante che trovasi nella formola $\vartheta \frac{\Delta}{E}$ data al num. V del § 7 dell' art. II per esprimere la resistenza che fa l' aria all' ingresso dell' acqua; e la seconda rappresenta la densità dell'aria. Avendo fatto $D = 1000$ chilogrammi, per esprimere la gravità specifica o densità dell' acqua (§ 203), sarà $D' = 1,1765$ la densità dell' aria atmosferica. Avuta la densità dell' aria atmosferica, si potrà facilmente avere la densità di una data massa d' aria che dalla compressione sia ridotta in minor volume, per mezzo della nota legge che le densità stanno in ragione inversa dei volumi.

La determinazione di ϑ avrebbe di bisogno di un esperimento fatto in quelle stesse circostanze nelle quali è calcolato il Problema; ma non avendo l' apparato necessario a tale uopo, ho fatta questa altr' esperienza, per mezzo della quale m' ingegnerò d' assegnare il valore a ϑ.

Premetto che aveva ingrandita la campana dell' Ariete descritto (§ 228), aggiungendovi al di sotto dell' orlo *IK* (F. 3. Tav. II) un cilindro di rame alto metri 0,636, e di un diametro eguale al

diametro IK della campana; così che l'altezza totale della campana è ora metri 1,012. Ho portata a basso di quel cilindro la chiave y per cavar l'acqua dalla campana, rasente il piatto su cui esso è fermato con le viti. Ho prolungato il cannello verticale NO entro la campana sino in vicinanza dell'animella della salita, dalla quale rimane distante soltanto quanto basta per non impedirne l'alzamento.

§ 20. Esperimento. Si è misurata l'intiera capacità della campana, compreso anche lo spazio occupato dal cannello ascendente, e si è trovata di metri cubici 0,0614305.

La capacità della porzione della campana da cui non può scappare l'aria, la quale capacità consiste in quello spazio compreso tra la superficie interna della campana ed il cannello che vi sta di mezzo, è stata misurata e ritrovata di metri cubici 0,0586136.

Ora avendo chiusa l'animella della fermata e lasciata liberamente scorrere l'acqua dalla vasca nel condotto, si è questa introdotta con qualche impeto nella campana; ha confinato nell'alto della medesima l'aria che era contenuta in quello spazio 0,0586136, e sarebbe sboccata fuori se non avessimo presa la precauzione di chiudere la bocca N del cannello NO (F. 3, T. II); in seguito, tolta la comunicazione tra la vasca ed il condotto, abbiamo aperta l'animella di fermata, onde il condotto si votasse e poscia misurando l'acqua che ritrovavasi nella campana, abbiamo rilevato lo spazio da lei occupato, e quello del quale era diminuito il volume dell'aria della campana, mercè la costipazione a lei indótta da quell'afflusso dell'acqua nella campana stessa.

Quest'aria erasi diminuita di circa una quinta parte del suo volume, già che il volume 0,0586136 che aveva prima, stava a quello nel quale si era ristretta :: 183 : 147.

Il volume adunque di quest'aria costipata era = 0,0470667; allora la densità D' di quest'aria si era fatta maggiore e nel rapporto di 147 : 183; era, cioè $D' = 1,46462$. Rimesso l'Ariete una altra volta in questa situazione, costipata, cioè, di nuovo l'aria per mezzo dell'ingresso dell'acqua, abbiamo aperta l'animella di fermata, onde l'acqua prendesse libero corso nel condotto, e

quando il getto era divenuto invariabile e l' acqua aveva acquistata (§ 236) la velocità dovuta all' altezza, la cui radice è 0,623391, abbiamo chiusa l'animella di fermata e dato così un colpo d' Ariete. In seguito abbiamo misurata l' acqua che si era con questo colpo introdotta nella campana, ed abbiamo trovato che essa era metri cubici 0,007442. Questa sperienza ripetuta più volte ci ha dato sempre i medesimi risultamenti. L' altezza poi dell' acqua che si trovava al di sopra dell' animella della salita, allorchè l'aria si era costipata nella campana e prima che si desse il colpo d' Ariete, era prossimamente 0,2173; è questo il valore di g'. Abbiamo ora tutti i *dati* per calcolare con siffatto esperimento il valore di quel coefficiente costante ϑ, servendoci della formola (q) del § 16 di questa Appendice.

Una tal formola è

$$Q = \frac{a'\sqrt{h}}{\alpha c^2} \cdot 2{,}30258 \left\{ -(b+2c\alpha) \cdot log \left(1 + \frac{2c\sqrt{H'}}{b+2c\alpha} \right) + (b-2c\alpha) \cdot log \left(1 + \frac{2c\sqrt{H'}}{b-2c\alpha} \right) \right\};$$

ed introdotti i valori dai *dati* nelle costanti a, b, c, si ha

$$a = 0{,}361658 - 0{,}00120184 \cdot \vartheta;$$
$$b = -0{,}974768;$$
$$c = 0{,}378843;$$
$$2c\alpha = \sqrt{(0{,}402128 + 0{,}00182123 \cdot \vartheta)};$$
$$\alpha c^2 = 0{,}189421 \sqrt{(0{,}402128 + 0{,}00182123 \cdot \vartheta)};$$

e quindi la formola (q) sarà

$$Q = \frac{0{,}211325}{\sqrt{(0{,}402128+0{,}00182123 \cdot \vartheta)}} \Big\{ - \left(-0{,}974768 + \sqrt{(0{,}402128+0{,}00182123 \cdot \vartheta)}\right) \times$$
$$log \left\{ 1 + \frac{0{,}463551}{-0{,}974768+\sqrt{(0{,}402128+0{,}00182123 \cdot \vartheta)}} \right\} - \left(0{,}974768+\sqrt{(0{,}402128+0{,}00182123 \cdot \vartheta)}\right) \times$$
$$log \left(1 + \frac{0{,}463551}{0{,}974768+\sqrt{(0{,}402128+0{,}00182123 \cdot \vartheta)}} \right) \Big\};$$

ove 0,46355 è il valore di $2c\sqrt{H'} = \frac{2c\lambda\sqrt{H}}{\lambda+g'}$; e fatto $\vartheta = 1486$,

si trova $Q = 0{,}0074416$, mentre l'esperienza ci dà $Q = 0{,}007442$.

In grazia adunque di questo sperimento possiamo ritenere quel valore per ϑ.

§ 21. Fatto pertanto $\vartheta = 1486$, lasciando la campana tutta ripiena d'aria come nel precedente esperimento e supponendo che l'acqua si spinga prima all'altezza di metri 4,678, poi all'altezza di metri 7,86, e che l'acqua incominci ad entrare nella campana con 4, 5, 6, 7 e 8 decimi della velocità calcolata per le tavole prima e seconda del Capo II, abbiamo fatto, con le formole che risolvono il problema V di quest'Appendice, altre due tavole, e sono quelle che seguono sotto i numeri Tavola V e VI. Ecco i dati che servono per la Tavola V: altezza cui l'acqua ascende al di sopra dell'animella della salita, metri 4,678; volume dell'aria contenuta nella campana nel suo stato naturale, metri cubici 0,0586136; volume di quest'aria costipata per la pressione dell'acqua montata a quell'altezza $E = 0,0405374$ metri cubici; densità di quest'aria $D' = 1,7$; altezza dell'acqua entro la campana al di sopra dell'animella della salita $g' = 0,3163127$ metri. Con questi dati si ottiene

$$a = -\ 2,0652;$$

$$b = -\ 0,967887;$$

$$c = 0,375665;$$

$$2\alpha c = 2,01002;$$

$$b + 2c\alpha = 1,042133;$$

$$b - 2c\alpha = -\ 2,977907;$$

$$\frac{2,30258}{\alpha c} = 2,2911;$$

$$2,30258 \cdot \frac{a'\sqrt{h}}{\alpha c^2} = 0,106025;$$

$$\frac{2c\sqrt{H'}}{b+2c\alpha} = \frac{2c\lambda\sqrt{H}}{(b+2c\alpha)(\lambda+g')} = 0,701613\sqrt{H};$$

$$\frac{2c\sqrt{H'}}{b-2c\alpha} = -\ 0,245543\sqrt{H};$$ e quindi

$$Q=0,106025\{-1,042133\cdot log(1+0,701613\sqrt{H})-2,977907\cdot log(1-0,245543\sqrt{H})\};$$

$$t=2,2911\{log(1+0,701613\sqrt{H})-log(1-0,245543\sqrt{H})\}.$$

E per la tavola VI: altezza cui l' acqua ascende metri 7,86 ecc.; volume dell' aria contenuta nella campana nel suo stato naturale, metri cubici $= 0,0586136$; volume di quest' aria costipata per la pressione dell' acqua montata a quell' altezza $E = 0,0338487$ metri cubici; densità di quest' aria; $D' = 2,037$; altezza dell' acqua entro la campana sopra l' animella della salita $g' = 0,417582$ metri; da questi dati risulta

$$a = -3,11463;$$

$$b = -0,960958;$$

$$c = 0,372464;$$

$$2c\alpha = 2,35877;$$

$$b + 2c\alpha = 1,397812;$$

$$b - 2c\alpha = -3,319728;$$

$$\frac{2,30258}{\alpha c} = 1,95235;$$

$$2,30258 \cdot \frac{a'\sqrt{h}}{\alpha c^2} = 0,0911254;$$

$$\frac{2c\sqrt{H'}}{b+2c\alpha} = \frac{2c\lambda\sqrt{H}}{(b+2c\alpha)(\lambda+g')} = 0,534736\sqrt{H};$$

$$\frac{2c\sqrt{H'}}{b-2c\alpha} = -0,225676\sqrt{H};$$

$$Q=0,0911254\left\{-1,397812\cdot log(1+0,534736\sqrt{H})-3,319728\cdot log(1-0,225676\sqrt{H})\right\};$$

$$t = 1,95235\cdot\left\{log(1+0,534736\sqrt{H})-log(1-0,225676\sqrt{H})\right\};$$

i dati poi che qui non si riferiscono, sono quei medesimi delle tavole I e II.

TAVOLA V. *Altezza cui l'acqua ascende al di sopra dell'animella della salita* = 4,678;
Volume dell'aria contenuta nella campana nel suo stato naturale = 0,0586136.

I Numero dei risultamenti	II Radici dell'altezza della velocità al chiuder:i l'animella della fermata.	III Tempo impiegato ad acquistarla.	IV Acqua perduta.	V Tempo pel quale sta aperta l'animella della salita.	VI Acqua innalzata.	VII Durata di un colpo d'Ariete.	VIII Numero dei colpi in un'ora.	IX Acqua perduta in un'ora.	X Acqua innalzata in un'ora.
1	4,0,0645768	1,38337	0,0078937	0,230911	0,000992024	1,814281	1988,830	15,6631	1,96843
2	5,0,0645768	2,20357	0,0141863	0,285232	0,001527000	2,488802	1446,480	20,5202	2,20877
3	6,0,0645768	2,99636	0,0240161	0,338746	0,002114990	3,335106	1079,420	25,9236	2,28298
4	7,0,0645768	4,06608	0,0396946	0,391166	0,002912620	4,457246	807,674	32,0603	2,35244
5	8,0,0645768	5,64778	0,0664634	0,442723	0,003757320	6,090303	591,084	39,2855	2,22090

TAVOLA VI. *Altezza cui l'acqua ascende al di sopra dell'animella della salita* = 7,86;
Volume dell'aria contenuta nella campana nel suo stato naturale = 0,0586136.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
6	4,0,0645768	1,38337	0,0078937	0,160630	0,000551317	1,744000	2064,220	16,2943	1,13804
7	5,0,0645768	2,20357	0,0141863	0,199198	0,001129230	2,402768	1498,270	21,2549	1,69189
8	6,0,0645768	2,99636	0,0240161	0,237240	0,001605260	3,233600	1113,310	26,7374	1,79127
9	7,0,0645768	4,06608	0,0396946	0,274803	0,002160130	4,340883	829,324	32,9192	1,79144
10	8,0,0645768	5,64778	0,0664634	0,311934	0,002793630	5,959714	604,066	40,1476	1,68751

§ 22. Ho cominciato dal far lavorare l' Ariete escludendo tutta l'aria della campana; nè temeva che, lavorando la macchina, s' introducesse dell' aria e si trattenesse nella campana, imperciocchè aveva tolto dall' interno di questa la porzione del cannello verticale che ne fa la comunicazione dal di dentro al di fuori, di modo che quell'aria che potevasi introdurre nello sperimento, scappava dall' alto. Ben poca acqua s' innalzava quando era esclusa tutta l' aria, ed in 20 colpi d' Ariete, i quali si sono fatti in 28 secondi, non ho potuto con la mia macchina innalzare a metri 7,86 più di metri cubici 0,00304322 di acqua. L' acqua sgorgava dall' alto a sbruffi in ogni colpo, e con grandissima violenza era scossa la campana e tutta la macchina; di più quegli sbruffi di acqua erano scagliati a qualche altezza sopra la bocca superiore del cannello, per cui conveniva prendere alcune precauzioni per raccorre l' acqua innalzata: avendo poi fatto il cannello verticale di pochi pollici, gli sbruffi dell' acqua erano lanciati fino all' altezza di circa 18 metri.

Ecco alcune poche sperienze che ho fatto nascondendo nella campana diverse quantità di aria. Si aveva la massima quantità di aria, quando l' intiera campana era ripiena di aria; per le altre quantità di aria, si racchiudeva essa in palloni i quali nascondevansi entro la campana, e conoscendo l' aria naturale che conteneva ogni pallone, si aveva l' aria di ciascuna sperienza.

De' sei esperimenti che sono registrati nella seguente tavola, i soli 43 e 46 contengono le circostanze medesime per le quali sono state calcolate le tavole V e VI; così se si conoscesse la velocità con la quale l' acqua correva al momento che essa, urtando sulla ventola, chiudeva l' animella della fermata e dava il colpo, si potrebbe ricercare quale risultamento delle tavole confrontare debbesi con la sperienza. Ma non abbiamo potuto esplorare questa velocità che approssimatamente, misurando l' ordinata orizzontale del getto allorchè l' acqua urtava la ventola. Questa velocità era prossimamente la metà della massima velocità che incontrasi nelle tavole I e II; così il risultamento secondo della tavola V, dovrà

confrontarsi con lo sperimento 46; ed il risultamento settimo della tavola VI collo sperimento 43. Questi due confronti riescono in vero soddisfacentissimi per la quantità di acqua alzata e pel tempo. In fatti nel primo confronto si ha l' acqua innalzata con la sperienza in un colpo di Ariete metri cubici 0,001580064, e la durata del colpo è 2,3"; mentre il calcolo assegna 0,001522700 per l' acqua innalzata, e 2,48" pel tempo.

Nel secondo confronto si ha l' acqua della sperienza = 0,001091697 ed il tempo = 2,3"; mentre l' acqua del calcolo è = 0,001129230 ed il tempo = 2,40".

Riguardo all' acqua perduta il calcolo c' insegna che essa debbe essere metri cubici 0,0141863, e nell' esperimento 43 quest' acqua perduta in un colpo è 0,011653oo, e nell' altro 46, quest' acqua è metri cubici, 0,0110530o.

Io poi non dissimulo di aver calcolate anche le tavole per confrontare gli esperimenti 41, 42, 44 e 45 con i risultamenti della Teorica; ma le tavole mi davano quantità di acqua innalzate molto minori delle vere. Così gran dubbio mi nasce sopra il principio che io ho posto al num. V del citato § 7, ove ho detto che la resistenza opposta dall' aria sta in ragione diretta della densità, ed inversa del volume. Certamente questa resistenza crescer debbe col crescere della densità, e col diminuire del volume, ma con qual legge non si è mai indagato.

Del resto questa stessa tavola VII chiaramente ci mostra l' effetto dell' aria racchiusa nella campana dell' Ariete per aumentare la quantità di acqua innalzata, restando eguali tutte le altre circostanze della macchina.

TAVOLA VII.

Sperienze.

I colpi dell' Ariete in ciascuna sperienza sono dieci.
La lunghezza del condotto . . . . = 11,614 ;
L' area dell' animella della salita = 0,0038 23 ;
La distanza della ventola . . . . = 0,200.

Numero degli sperimenti.	Tempo in mezzi secondi.	Salita dell' acqua.	Aria della campana nello stato naturale.	Acqua innalzata.	Acqua perduta.
41	49	7,860	0,0032860	0,00608644	0,0915623
42	40	7,860	0,0128504	0,00992676	0,0915623
43	46	7,860	0,0586136	0,01091697	0,1165300
44	52	10,956	0,0032860	0,00352148	0,0821670
45	42	10,956	0,0128504	0,00752122	0,0928180
46	46	4,678	0,0586136	0,01580064	0,11053[illegible]

CONCLUSIONE.

Da tutto quello che ho scritto nel Trattato dell' Ariete idraulico e nell' Appendice aggiuntavi, si può conchiudere:

1.° Che ora si conoscono tutte quante le cause le quali hanno parte nei sorprendenti effetti dell' Ariete;

2.° Che si conosce come ciascuna di esse abbia che fare nell' aumentare o diminuire un effetto della macchina;

3.° Che sappiamo ora quali cambiamenti nelle parti della macchina e dimensioni loro producano vantaggio o scapito;

4.° Che possiamo rendere ragione di tutti i più piccioli fenomeni che incontransi nel giuoco dell' Ariete idraulico;

5.° Che abbiamo sottomesso all' impero della Geometria la misura di quelle cagioni, ed il computo degli effetti da esse prodotti;

6. Che in fine la Teorica di questa macchina è nella stessa situazione nella quale si ritrovano le Teoriche delle più semplici e più conosciute macchine meccaniche e idrauliche.

Egli è vero che talvolta non siamo giunti a taluni risultamenti, se non per via dell' approssimazione, ma, come abbiamo detto nel discorso preliminare, ognuno avrà potuto riconoscere che ciò dipende dallo stato attuale dell'*Analisi*, nel quale s'incontrano sovente equazioni differenziali che esattamente non si sanno integrare; e nel quale non si conosce ancora un metodo atto a risolvere l' equazioni, nelle quali l'incognita è sotto forma algebraica e trascendente.

Per ciò poi che spetta alla corrispondenza tra i risultamenti della Teorica e gli esperimenti, io ho fatto vedere quali sono i motivi, la cui mercè non può esser quella così perfetta, come taluno forse vorrebbe; di modo che mi lusingo che niuno vi sarà, il quale dopo aver letta la terza Parte del Trattato, non sia per convenire pienamente su di quanto io ho asserito nel mentovato discorso preliminare, che, cioè, la prima ragione della discordanza nasce dal non potere introdurre in computo certi elementi, la natura dei quali si sa così all' ingrosso, e su di cui non sono state fatte

naturali esperienze onde conoscerne la forza. Sia, a modo d' esempio, l' elasticità delle pareti del condotto: si sa che esse, percosse dall' acqua, si distenderanno, e poscia torneranno a ristringersi, e serrarsi, per dir così, sopra l' acqua per rispingerla indietro, ma intieramente s' ignora la regola con la quale succederanno queste operazioni.

Del resto, quando si volesse fare il computo di un dato Ariete, basterebbe seguire le regole con le quali abbiamo calcolate le tavole V e VI, giacchè, facendo lavorare la macchina col dare all' acqua nel condotto una velocità che sia poco più della metà di quella del getto invariabile (velocità che è la più vantaggiosa), i risultamenti del calcolo non molto si allontanano dalle sperienze; quelle regole in vero ci daranno un poco meno di acqua innalzata, e più acqua perduta, ma questa stessa cosa sarà un assai grande vantaggio, giacchè saremo certi che il risultamento della sperienza sarà sempre favorevole, nè avverrà mai di doversi pentire d' aver fatta fare la macchina.

FINE.

Tav. I.
Fig. 7.
·9·
B
Z
Z
M
E'
L
N
E
F
P
P'
G
H
D
A
M
A
B
C
D
L
K
f
g
F
G
C